Dénombrement et Probabilité

Boîte à outils

Dénombrement

- *Principe de multiplication:* Considérez deux tâches indépendantes. S'il y a a manières de réaliser une tâche et b manières de réaliser une autre tâche, alors il y a ab manières de réaliser les deux tâches.

- *Principe d'addition:* Si une tâche peut être accomplie de a façons distinctes ou de b façons distinctes, sans aucune façon commune entre elles, alors le nombre total de façons d'accomplir la tâche est égal à $a+b$.

- *Principe d'inclusion-exclusion:* Si une tâche peut être accomplie de a façons ou de b façons, avec c façons étant communes aux deux, alors le nombre total de façons d'accomplir la tâche est égal à $a+b-c$.

- *Éléments complémentaires:* S'il y a a éléments dans un ensemble satisfaisant une propriété donnée, alors

  $a = \big(\text{nombre total d'éléments dans l'ensemble}\big) - \big(\text{nombre d'éléments qui ne satisfont pas la propriété donnée}\big)$

- Le nombre de permutations possibles de n objets distincts est $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$. Remarquez que $0! = 1$.

- Le nombre de manières de choisir k objets parmi n objets distincts est $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

- *Principe des tiroirs :* Soit k un entier positif. Si l'on range $k+1$ objets dans k tiroirs, alors il y a au moins un tiroir contenant deux objets ou plus.

Probabilité

Soit A l'ensemble des résultats possibles satisfaisant une condition donnée. On utilise $\overline{A}$ pour représenter l'ensemble des résultats possibles qui ne sont pas dans l'ensemble A. Soit B l'ensemble des résultats possibles satisfaisant une autre condition.

- Si tous les résultats sont équiprobables, alors la probabilité de l'événement A est

$$P(A) = \frac{\text{nombre de résultats dans } A}{\text{nombre total de résultats possibles}}$$

- $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

- Si A et B sont des événements indépendants (la réalisation ou non de l'un des événements n'a pas d'incidence sur la probabilité de réalisation de l'autre), alors $P(A \text{ et } B) = P(A)P(B)$.

- $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ et } B)$

Exemples de problèmes

1. Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs de 4 chiffres qui commencent par un chiffre impair ou qui sont divisibles par 5?

   Solution

   Pour commencer, on détermine combien d'entiers strictement positifs de 4 chiffres commencent par un chiffre impair. Il y a 5 choix pour le premier chiffre et 10 choix pour chacun des 3 chiffres restants. Donc, il y a $5(10)(10)(10) = 5000$ entiers strictement positifs de 4 chiffres qui répondent à ce critère.

   Ensuite, on détermine combien d'entiers strictement positifs de 4 chiffres sont divisibles par 5. Pour qu'un entier soit divisible par 5, son dernier chiffre doit être soit 0, soit 5. Par conséquent, il y a 9 choix pour le premier chiffre car on ne peut utiliser le chiffre 0, 10 choix pour le deuxième chiffre, 10 choix pour le troisième chiffre et 2 choix pour le dernier chiffre. Donc, il y a $9(10)(10)(2) = 1800$ entiers strictement positifs de 4 chiffres qui sont divisibles par 5.

   Cependant, ces deux ensembles ont des éléments en commun. Le nombre d'entiers strictement positifs de 4 chiffres qui commencent par un chiffre impair et qui sont divisibles par 5 est égal à $5(10)(10)(2) = 1000$.

   Par conséquent, le nombre total d'entiers strictement positifs de 4 chiffres qui commencent par un chiffre impair ou qui sont divisibles par 5 est égal à $5000 + 1800 - 1000 = 5800$.

2. Combien de comités de 5 personnes peuvent être sélectionnés à partir de six enseignants et huit élèves si les comités doivent comprendre au moins deux élèves?

   Solution 1

   Le nombre de comités sans restrictions est égal à $\binom{14}{5} = 2002$.

   Le nombre de comités qui ne comprennent aucun élève est égal à $\binom{6}{5}\binom{8}{0} = 6(1) = 6$.

   Le nombre de comités qui comprennent 1 élève est égal à $\binom{6}{4}\binom{8}{1} = 15(8) = 120$.

   Donc, le nombre de comités qui comprennent au moins deux élèves est égal à $2002 - 6 - 120 = 1876$.

   Solution 2

   Le nombre de comités qui comprennent r élèves est égal à $\binom{6}{5-r}\binom{8}{r}$. Donc, le nombre de comités qui comprennent au moins deux élèves est égal à

   $$\binom{6}{3}\binom{8}{2} + \binom{6}{2}\binom{8}{3} + \binom{6}{1}\binom{8}{4} + \binom{6}{0}\binom{8}{5} = (20)(28) + 15(56) + 6(70) + 1(56) = 1876$$

3. Supposons qu'un tiroir contient 15 paires de chaussettes différentes. Si l'on retire les chaussettes du tiroir une par une au hasard, combien de chaussettes doit-on retirer avant d'être sûr d'avoir une paire assortie?

   Solution

   On doit choisir 16 chaussettes. Les 15 premières chaussettes que l'on choisit pourraient toutes être différentes. Mais selon le principe des tiroirs, si l'on a 16 chaussettes de 15 types différents, on aura nécessairement au moins deux chaussettes identiques. On est donc assuré d'avoir une paire assortie.

4. On lance un dé juste dont les six faces portent les numéros $1, 2, 3, 4, 6$ et 8. Après le lancer, si la face supérieure du dé porte un numéro impair, alors on double tous les numéros impairs du dé; si la face supérieure du dé porte un numéro pair, on divise par deux tous les numéros pairs du dé. Si on lance un tel dé deux fois de suite, quelle est la probabilité d'obtenir un 2 lors du second lancer du dé?

   Solution

   Il y a deux resultats possibles pour le premier lancer: on peut obtenir un numéro pair ou un numéro impair.

   Premier cas: le premier lancer donne un numéro impair

   La probabilité pour que le premier lancer donne un numéro impair est égale à $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

   Après avoir doublé tous les numéros impairs, les faces du dé affichent $2, 2, 6, 4, 6, 8$, d'où la probabilité pour que le second lancer donne un 2 est égale à $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Donc, la probabilité d'obtenir un numéro impair lors du premier lancer et un 2 lors du second est égale à $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

   Second cas: le premier lancer donne un numéro pair

   La probabilité pour que le premier lancer donne un numéro pair est égale à $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

   Après avoir divisé par deux tous les nombres pairs, les faces du dé affichent $1, 1, 3, 2, 3, 4$, d'où la probabilité pour que le second lancer donne un 2 est égale à $\frac{1}{6}$. Donc, la probabilité d'obtenir un numéro pair lors du premier lancer et un 2 lors du second est égale à $\frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$.

   Ces deux cas sont mutuellement exclusifs, on peut donc tout simplement additionner leurs probabilités. Donc, la probabilité d'obtenir un 2 lors du second lancer est égale à $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$.

5. Les entiers $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ sont disposés au hasard de manière à former un nombre de 7 chiffres. Quelle est la probabilité pour que le nombre formé soit inférieur à $3\,200\,000$?

   Solution:

   Le nombre formé est inférieur à $3\,200\,000$ si l'un des deux cas suivants se produit: (i) le premier chiffre est 1 ou 2 ou (ii) le premier chiffre est 3 et le deuxième chiffre est 1. La probabilité pour que le premier chiffre soit 1 ou 2 est égale à $\frac{2}{7}$. La probabilité pour que le premier chiffre soit 3 est égale à $\frac{1}{7}$. Si le premier chiffre est 3, la probabilité pour que le deuxième chiffre soit 1 est égale à $\frac{1}{6}$. Donc, la probabilité pour que les premier et deuxième chiffres soient respectivement 3 et 1 est égale à $\frac{1}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{42}$.

   Ces cas sont mutuellement exclusifs, on peut donc tout simplement additionner leurs probabilités. Donc, la probabilité pour que le nombre formé soit inférieur à $3\,200\,000$ est égale à $\frac{2}{7} + \frac{1}{42} = \frac{13}{42}$.

6. Si l'on lance 5 pièces de monnaie équilibrées, quelle est la probabilité pour qu'au moins deux d'entre elles tombent du côté FACE?

Solution:

Étant donné qu'il y a cinq pièces et que chaque pièce a deux faces possibles, il y a $2^5 = 32$ résultats possibles. Il est plus simple de compter le nombre de résultats qui ne contiennent pas au moins deux FACE (soit les résultats où 0 ou 1 pièce tombe du côté FACE) puis de soustraire ce nombre du nombre total de résultats. Il n'y a qu'un seul résultat possible où aucune des cinq pièces ne tombe du côté FACE. Il y a cinq résultats possibles où exactement une des cinq pièces tombe du côté FACE. Donc, la probabilité pour qu'au moins deux des pièces tombent du côté FACE est égale à $\dfrac{32-(1+5)}{32} = \dfrac{13}{16}$.

Trousse de problèmes

1. Soit a, b, c, d, e cinq entiers strictement positifs distincts. Démontrer que l'on peut choisir trois de ces entiers de sorte que leur somme soit divisible par 3.

2. Une *permutation* d'une liste de nombres est un agencement ordonné des nombres de cette liste. Par exemple, $3, 2, 4, 1, 6, 5$ est une permutation de $1, 2, 3, 4, 5, 6$. On peut représenter cette permutation par $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ où $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 1, a_5 = 6$ et $a_6 = 5$. Déterminer la valeur moyenne de
$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7$$
pour toutes les permutations $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ de $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

3. Trois nombres différents sont choisis au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Les nombres sont placés en ordre croissant. Quelle est la probabilité pour que ces trois nombres forment une suite arithmétique?

4. Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs inférieurs à 1000 dont tous les chiffres sont impairs?

5. Tanner a deux dés identiques. Chaque dé a six faces portant les numéros $2, 3, 5, 7, 11$ et 13. Lorsque Tanner jette les deux dés, quelle est la probabilité pour que la somme des nombres sur les faces supérieures soit un nombre premier ?

6. Blaise et Pierre s'apprêtent à jouer 6 parties de squash. Comme ils sont de force égale, chacun a autant de chances de gagner une partie que l'autre. (Au squash, il n'y a pas de partie nulle.) La probabilité pour que chacun d'eux gagne 3 des 6 parties est égale à $\frac{5}{16}$. Quelle est la probabilité pour que Blaise gagne plus de parties que Pierre?

7. Dans un sac, il y a 40 boules, chacune étant noire ou dorée. Feridun plonge son bras dans le sac et en sort deux boules au hasard. Chaque boule du sac a la même chance d'être choisie. Sachant que la probabilité de sortir deux boules dorées du sac est de $\frac{5}{12}$, combien des 40 boules sont dorées?

8. Un entier n (où $100 \leq n \leq 999$) est choisi au hasard. Quelle est la probabilité pour que la somme des chiffres de n soit égale à 24?

9. Billy et Crystal ont chacun un sac de 9 boules. Dans chaque sac, les boules sont numérotées de 1 à 9. Billy et Crystal retirent chacun une boule de leur propre sac. Soit b la somme des numéros sur les boules qui restent dans le sac de Billy. Soit c la somme des numéros sur les boules qui restent dans le sac de Crystal. Déterminer la probabilité pour que la différence entre b et c soit un multiple de 4.

10. Oi-Lam lance trois pièces de monnaie justes et enlève les pièces qui tombent du côté FACE. Ensuite, elle lance les pièces qui restent, s'il y en a. Déterminer la probabilité pour qu'elle obtienne exactement une FACE lors de son second lancer.

11. Deux sacs contiennent chacun 10 boules numérotées de 1 à 10. Pierre retire au hasard une boule de chaque sac. (Dans chaque sac, chaque boule a les mêmes chances d'être choisie.) Déterminer la probabilité pour que le produit des numéros sur les deux boules choisies soit divisible par 10.

12. La chaîne $AAABBBAABB$ est une chaîne de dix lettres, chaque lettre étant un A ou un B, qui ne comprend pas les lettres consécutives $ABBA$.

    La chaîne $AAABBAAABB$ est une chaîne de dix lettres, chaque lettre étant un A ou un B, qui comprend les lettres consécutives $ABBA$.

    Déterminer le nombre de chaînes de dix lettres, chaque lettre étant un A ou un B, qui ne comprennent pas les lettres consécutives $ABBA$. Justifier sa démarche.

13. Étant donné un entier strictement positif N, une *suite Eden* sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$ des entiers consécutifs de 1 à N est une suite qui satisfait aux conditions suivantes :

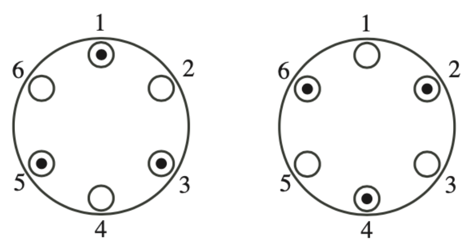
    - chacun de ses termes est un élément de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$,
    - la suite est croissante, et
    - les termes dans les positions impaires sont impairs et les termes dans les positions paires sont pairs.

    Par exemple, les quatre suites Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sont :

    $$1 \qquad 3 \qquad 1, 2 \qquad 1, 2, 3$$

    Déterminer le nombre de suites Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

14. Supposons qu'il y a n assiettes espacées également autour d'une table de forme circulaire. Ross veut placer un cadeau identique dans chacune de k assiettes de manière que deux assiettes voisines ne puissent contenir chacune un cadeau. Soit $f(n, k)$ le nombre de façons possibles de répartir les cadeaux. Par exemple, $f(6, 3) = 2$, comme on peut le constater dans la figure suivante.



    (a) Déterminer la valeur de $f(7, 3)$.
    (b) Démontrer que $f(n, k) = f(n - 1, k) + f(n - 2, k - 1)$ pour tous les entiers tels que $n \geq 3$ et $k \geq 2$.