Propriétés des nombres

Boîte à outils

Critères de divisibilité

- Un entier est divisible par 2 si et seulement si son dernier chiffre est divisible par 2.
- Un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un entier est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
- Un entier est divisible par 5 si et seulement si son dernier chiffre est 0 ou 5.
- Un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un entier est divisible par 10 si et seulement si son dernier chiffre est 0.
- Un entier est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11.

Propriétés générales des entiers

- Un nombre de k chiffres $n = d_{k-1}d_{k-2}\cdots d_2d_1d_0$, d_i étant un chiffre de 0 à 9, peut être exprimé sous la forme

  $$d_0 + d_1 \times 10 + d_2 \times 10^2 + \cdots + d_{k-2} \times 10^{k-2} + d_{k-1} \times 10^{k-1}$$

  Cette expression est le *développement décimal* de n. Chaque entier n a un développement décimal unique.

- Si l'entier $p \geq 2$ est premier et que $p = ab$, a et b étant des entiers strictement positifs, alors soit $a = 1$, soit $b = 1$.
- Un entier n est un carré parfait si et seulement si $n = k^2$, k étant un entier non négatif quelconque.
- Tout entier $n \geq 2$ peut s'écrire de manière unique comme produit de facteurs premiers, mis à part l'ordre dans lequel les facteurs paraissent.
- Si $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ est la représentation unique d'un entier strictement positif $n \geq 2$ en tant que produit de nombres premiers distincts $p_1, p_2, \ldots, p_k$, alors n admet $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$ diviseurs positifs.
- Tout entier n est soit pair soit impair. Si n est pair, alors $n = 2k$, k étant un entier quelconque. Si n est impair, alors $n = 2k + 1$, k étant un entier quelconque.

  De manière similaire, on peut écrire n'importe quel entier sous l'une des formes suivantes: $3k, 3k + 1$ ou $3k + 2$, k étant un entier quelconque.

  Plus généralement, pour tous les entiers a et les entiers strictement positifs b, il existe des entiers uniques q et r tels que

  $$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b$$

- Pour tous les entiers a et b et les nombres premiers p, si p est un diviseur de ab, alors p est un diviseur de a ou p est un diviseur de b.

Exemples de problèmes

1. Quel est le plus petit entier strictement positif k pour lequel $504k$ est un carré parfait?

   Solution

   On écrit l'entier 504 en factorisation première: $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$. Dans la factorisation première d'un carré parfait, chacun des facteurs premiers parait un nombre pair de fois. Donc, si $504k$ est un carré parfait, alors k doit être de la forme $2 \times 7 \times m$, m étant un carré parfait. La plus petite valeur positive de m qui est un carré parfait est $m = 1$. Donc, $k = 14$.

2. Le nombre 27572 est un *palindrome* car on peut le lire de gauche à droite ou de droite à gauche. Quel est le plus grand palindrome de cinq chiffres qui est divisible par 6?

   Solution

   Un entier est divisible par 6 s'il est divisible à la fois par 2 et par 3. Puisque le palindrome est divisible par 2, son dernier chiffre doit être pair. Par conséquent, le premier chiffre doit être pair. La plus grande valeur du premier chiffre est 8. La plus grande valeur du deuxième chiffre est 9, d'où le quatrième chiffre doit également être 9. Pour déterminer le chiffre du milieu, on utilise le fait que si un entier est divisible par 3, alors la somme de ses chiffres doit être divisible par 3.

   Soit a le chiffre du milieu. Puisque a est un chiffre, alors $a \leq 9$. Donc, la somme des chiffres est égale à $8 + 9 + a + 9 + 8 = 34 + a$. La plus grande valeur possible de $a \leq 9$ pour laquelle $34 + a$ est divisible par 3 est 8. Donc, le plus grand palindrome de cinq chiffres qui est divisible par 6 est 89898.

3. Lorsqu'on multiplie un nombre positif de deux chiffres m par un nombre positif de trois chiffres n, on obtient un produit de 21210. Déterminer tous les couples (m, n) possibles.

   Solution

   On écrit l'entier 21210 en factorisation première: $21210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 101$.

   Puisque m est un nombre de deux chiffres, il ne peut admettre 101 comme diviseur. Donc, n est un multiple de 101.

   La factorisation première de n peut comprendre au plus un 2, au plus un 3, au plus un 5 et au plus un 7.

   Puisque n est un nombre de trois chiffres, les valeurs possibles de n sont 101, 202, 303, 505, 606 et 707. Les valeurs correspondantes de m sont respectivement 210, 105, 70, 42, 35 et 30.

   Puisque m est un nombre de deux chiffres, 210 et 105 ne sont pas possibles. Donc, les couples (m, n) possibles sont $(70, 303), (42, 505), (35, 606)$ et $(30, 707)$.

4. Un nombre admet exactement huit diviseurs positifs, y compris 1 et le nombre lui-même. Sachant que deux des diviseurs sont 35 et 77, quelle est la somme des huit diviseurs positifs?

   Solution

   Soit n le nombre. Puisque n est divisible par $35 = 5 \times 7$ et par $77 = 7 \times 11$, alors il doit être de la forme $k \times 5^a \times 7^b \times 11^c$, k, a, b et c étant des entiers strictement positifs.

   Soit m le nombre de diviseurs positifs de k avec $m \geq 1$. Donc, n admet $m(a+1)(b+1)(c+1) = 8$ diviseurs positifs. Puisque $a, b, c \geq 1$, alors $m = a = b = c = 1$. Donc, $n = 5 \times 7 \times 11 = 385$.

Les huit diviseurs positif sont $1, 5, 7, 11, 35, 55, 77$ et 385. Leur somme est égale à

$$1 + 5 + 7 + 11 + 35 + 55 + 77 + 385 = 576$$

5. Soit m et n des entiers. Démontrer que $mn(m^4 - n^4)$ sera toujours divisible par 30.

Démonstration

Soit $T = mn(m^4 - n^4) = mn(m^2 - n^2)(m^2 + n^2) = mn(m - n)(m + n)(m^2 + n^2)$.

Pour montrer que T est divisible par 30, il faut montrer qu'il est divisible par 2, 3 et 5.

Si au moins l'un de m ou n est pair, alors T est divisible par 2. Si m et n sont tous deux impairs, alors $m + n$ est pair, d'où T est donc divisible par 2.

Si au moins l'un de m ou n est divisible par 3, alors T est divisible par 3. Si m et n ne sont pas divisibles par 3, alors $m = 3k + 1$ ou $m = 3k + 2$, k étant un entier quelconque. Cependant, si $m = 3k + 2$, alors $m = 3k + 3 - 1 = 3(k + 1) - 1$. Puisque k est un entier, alors $k + 1$ est également un entier. Donc, $m = 3j - 1$, j étant un entier quelconque. Puisque le choix du symbole pour la variable est arbitraire, on peut simplement dire que $m = 3k+1$ ou $m = 3k-1$ (ou plus concisément que $m = 3k \pm 1$), k étant un entier quelconque.

De même, on peut dire que $n = 3j \pm 1$, j étant un entier quelconque.

Si $m = 3k + 1$ et $n = 3j + 1$, alors $m - n = 3k + 1 - 3j - 1 = 3k - 3j = 3(k - j)$. Puisque k et j sont des entiers, alors $m - n$ est divisible par 3.

De façon semblable, on peut montrer que si $m = 3k-1$ et $n = 3j-1$, alors $m-n$ sera divisible par 3.

Si $m = 3k + 1$ et $n = 3j - 1$, alors $m + n = 3k + 1 + 3j - 1 = 3k + 3j = 3(k + j)$. Puisque k et j sont des entiers, alors $m + n$ est divisible par 3.

De façon semblable, on peut montrer que si $m = 3k-1$ et $n = 3j+1$, alors $m+n$ sera divisible par 3.

Donc, dans chaque cas, soit $m - n$ soit $m + n$ est divisible par 3. Donc, T est divisible par 3.

Si au moins l'un de m ou n est divisible par 5, alors T est divisible par 5. Si m et n ne sont pas divisibles par 5, alors $m = 5k+1$ ou $m = 5k+2$ ou $m = 5k+3$ ou $m = 5k+4$, k étant un entier quelconque. Cependant, si $m = 5k + 3$, alors $m = 5k + 5 - 2 = 5(k + 1) - 2$. Puisque k est un entier, alors $k + 1$ est également un entier. Donc, $m = 5j - 2$, j étant un entier quelconque. De plus, si $m = 5k + 4$, alors $m = 5k + 5 - 1 = 5(k + 1) - 1$. Puisque k est un entier, alors $k + 1$ est également un entier. Donc, $m = 5\ell - 1$, ℓ étant un entier quelconque. Encore une fois, comme le choix du symbole pour la variable est arbitraire, on peut simplement dire que $m = 5k \pm 1$ ou $m = 5k \pm 2$, k étant un entier quelconque.

De même, on peut dire que $n = 5j \pm 1$ ou $n = 5j \pm 2$, j étant un entier quelconque.

Si $m = 5k \pm 1$, alors

$$m^2 = (5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1$$

Puisque k est un entier, alors $5k^2 \pm 2k$ est également un entier. Donc, m^2 est de la forme $5a+1$, a étant un entier quelconque.

Si $m = 5k \pm 2$, alors

$$m^2 = (5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 25k^2 \pm 20k + 5 - 1 = 5(5k^2 \pm 4k + 1) - 1$$

Puisque k est un entier, alors $5k^2 \pm 4k + 1$ est également un entier. Donc, m^2 est de la forme $5a - 1$, a étant un entier quelconque. Donc, $m^2 = 5a \pm 1$.

De même, on peut montrer que $n^2 = 5b \pm 1$.

Donc, de façon similaire à la démarche adoptée dans le cas de divisibilité par 3, on peut montrer que, dans tous les cas, soit $m^2 + n^2$ soit $m^2 - n^2$ est divisible par 5. Donc, T est divisible par 5.

Donc, T est divisible par 2, 3 et 5; T est donc divisible par 30.

Trousse de problèmes

1. Quel est le plus grand palindrome inférieur à 200 qui est la somme de trois entiers consécutifs?

2. Le nombre n est un entier positif de deux chiffres. Lorsqu'on place une virgule décimale entre les chiffres de n, le nombre qui en résulte est égal à la moyenne des chiffres de n. Quelle est la valeur de n?

3. Soit n l'entier égal à $10^{20} - 20$. Quelle est la somme des chiffres de n?

4. Dans la suite de Fibonacci, $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$, chaque terme après les deux premiers est égal à la somme des deux termes précédents. Parmi les 100 premiers termes de la suite de Fibonacci, combien sont impairs?

5. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 900, y inclus 1 et 900, qui sont des carrés parfaits.

6. Eliane a deux listes, chacune étant composée de 6 entiers consécutifs strictement positifs. Le plus petit entier de la première liste est a, le plus petit entier de la deuxième liste est b et $a < b$. Eliane forme une troisième liste composée des 36 entiers obtenus en multipliant chaque entier de la première liste par chaque entier de la deuxième liste. (Cette troisième liste peut contenir des entiers répétés.) Sachant que

   - l'entier 49 paraît dans la troisième liste,
   - aucun entier de la troisième liste n'est un multiple de 64 et
   - il existe au moins un entier supérieur à 75 dans la troisième liste,

   déterminer tous les couples (a, b) possibles.

7. Charles est né entre l'an 1300 et 1400. Louis est né entre l'an 1400 et 1500. Chacun est né le 6 avril d'une année qui est un carré parfait. Chacun a vécu 110 ans. En quelle année, pendant qu'ils étaient tous deux en vie, l'âge de chacun était-il un carré parfait le 7 avril?

8. Quel est le plus petit entier strictement positif x pour lequel $\dfrac{1}{32} = \dfrac{x}{10^y}$, y étant un entier strictement positif quelconque?

9. Trois multiples consécutifs de 3 ont une moyenne de a.

   Quatre multiples consécutifs de 4 ont une moyenne de $a + 27$.

   Le plus grand et le plus petit de ces sept nombres ont une moyenne de 42. Déterminer la valeur de a.

10. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs qui vérifient $a^3 + 2ab = 2013$.

11. Les chaises dans un auditorium sont disposées de façon rectangulaire. Il y a exactement 14 enseignants assis dans chaque rangée et exactement 10 élèves assis dans chaque colonne. Sachant qu'il y a exactement 3 chaises vides, démontrer qu'il y a au moins 567 chaises dans l'auditorium.