Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2002 Solutions
Concours Gauss
(7^e et 8^e années – Sec. I et II)

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

SYBASE
Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Comité exécutif	Barry Ferguson (Directeur), Peter Crippin, Ruth Malinowski, Ian VanderBurgh
Le directeur d'operation	Barry Ferguson, University of Waterloo
Ordinatique	Steve Breen, University of Waterloo Don Cowan, University of Waterloo
Compilateurs du rapport du Concours Gauss	Lloyd Auckland, University of Waterloo Barry Ferguson, University of Waterloo
Documentation	Bonnie Findlay, University of Waterloo
Publications	Bonnie Findlay, University of Waterloo
Version française	André Ladouceur, Collège catholique Samuel-Genest, Ottawa Robert Laliberté, École secondaire publique Louis-Riel Gérard Proulx, Collège catholique Franco-Ouest, Ottawa Rodrigue St-Jean, École secondaire Embrun, Embrun
Adjoints à la technique	Joanne Kursikowski, Linda Schmidt, Kim Schanrr
Comité de validation	Ed Anderson, University of Waterloo, Waterloo John Barsby, St. John's-Ravenscourt School, Winnipeg Jean Collins, (retraité), Thornhill Ron Scoins, University of Waterloo, Waterloo

Comité Gauss

Solutions Gauss 2002

Bob McRoberts (Chair)
Dr. G.W. Williams S.S.
Aurora, Ontario

Richard Auckland
Southwood Public School
St. Thomas, Ontario

Mark Bredin (Assoc. Chair)
St. John's-Ravenscourt School
Winnipeg, Manitoba

Sandy Emms Jones
Forest Heights C.I.
Kitchener, Ontario

Joanne Halpern
Toronto, Ontario

David Matthews
University of Waterloo
Waterloo, Ontario

John Grant McLoughlin
Memorial University of Newfoundland
St. John's, Newfoundland

Patricia Tinholt
Valley Park Middle School
Don Mills, Ontario

Sue Trew
Holy Name of Mary S.S.
Mississauga, Ontario

Partie A

1. Si on place les nombres 8, 3, 5, 0 et 1 en ordre, du plus petit au plus grand, le nombre au milieu est :
(**A**) 5 (**B**) 8 (**C**) 3 (**D**) 0 (**E**) 1

Solution
Si on place les nombres en ordre, du plus petit au plus grand, on obtient 0, 1, 3, 5, 8. Le nombre au milieu est 3. RÉPONSE : (C)

2. La valeur de $0{,}9 + 0{,}99$ est :
(**A**) 0,999 (**B**) 1,89 (**C**) 1,08 (**D**) 1,98 (**E**) 0,89

Solution
On additionne :

$$\begin{array}{r} 0{,}9 \\ +\,0{,}99 \\ \hline 1{,}89 \end{array}$$

RÉPONSE : (B)

3. $\dfrac{2+1}{7+6}$ est égal à :
(**A**) $\frac{3}{13}$ (**B**) $\frac{21}{76}$ (**C**) $\frac{1}{21}$ (**D**) $\frac{2}{13}$ (**E**) $\frac{1}{14}$

Solution
On a $\dfrac{2+1}{7+6} = \dfrac{3}{13}$. RÉPONSE : (A)

4. 20 % de 20 est égal à :
(**A**) 400 (**B**) 100 (**C**) 5 (**D**) 2 (**E**) 4

Solution
20 % de 20 est égal à $0{,}2 \times 20$, ou 4.
D'une autre façon, on sait que 20 % de 20 est égal à $\frac{1}{5}$ de 20, ou 4. RÉPONSE : (E)

5. Trina gagne 5 $ l'heure à garder des enfants. Cette semaine, elle a gardé pendant 7 heures. Si elle avait 20 $ en banque au début de la semaine et si elle dépose tout ce qu'elle a gagné dans son compte sans retirer d'argent, quelle somme aura-t-elle en banque?
(**A**) 35 $ (**B**) 20 $ (**C**) 45 $ (**D**) 55 $ (**E**) 65 $

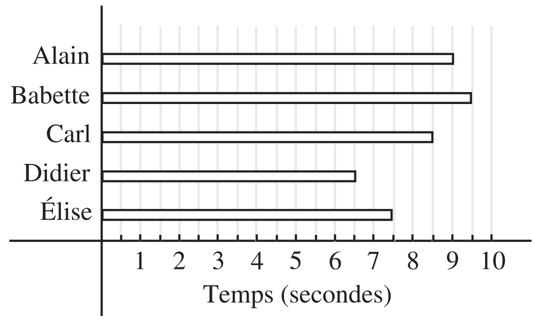
Solution

Puisque Trina gagne 5 $ l’heure pendant 7 heures, elle gagne 7 ¥ 5 $, ou 35 $ en tout. Comme elle avait déjà 20 $ en banque et qu’elle y ajoute 35 $, elle aura 20 $ + 35 $, ou 55 $ en banque.

RÉPONSE : (D)

6. Cinq rats ont participé à une course de 25 mètres. Le diagramme indique le temps que chaque rat a mis pour compléter la course. Quel rat a gagné la course?

(**A**) Alain (**B**) Babette (**C**) Carl
(**D**) Didier (**E**) Élise



Solution

Le rat qui a mis le moins de temps à compléter la course a gagné. Il s’agit donc de Didier.

RÉPONSE : (D)

7. La moyenne des nombres 12, 14, 16 et 18 est égale à :

(**A**) 30 (**B**) 60 (**C**) 17 (**D**) 13 (**E**) 15

Solution

La moyenne des nombres est égale à $\frac{12+14+16+18}{4}$, c’est-à-dire à $\frac{60}{4}$, ou 15.

RÉPONSE : (E)

8. Si $P = 1$ et $Q = 2$, laquelle des expressions suivantes ne représente **pas** un nombre entier?

(**A**) $P + Q$ (**B**) P ¥ Q (**C**) $\frac{P}{Q}$ (**D**) $\frac{Q}{P}$ (**E**) P^Q

Solution

On évalue les diverses expressions :

(A) $P + Q = 3$ **(B)** P ¥ $Q = 2$ **(C)** $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{Q}{P} = \frac{2}{1} = 2$ **(E)** $P^Q = 1^2 = 1$

RÉPONSE : (C)

9. Quatre amis partagent les $\frac{3}{4}$ d’une pizza qu’il reste après une fête. Si chaque ami reçoit la même quantité, quelle fraction d’une pizza complète chacun reçoit-il?

(**A**) $\frac{3}{8}$ (**B**) $\frac{3}{16}$ (**C**) $\frac{1}{12}$ (**D**) $\frac{1}{16}$ (**E**) $\frac{1}{8}$

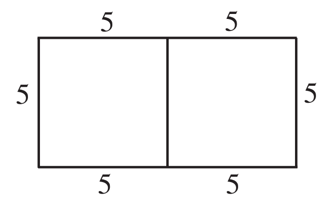
Solution

Si quatre amis partagent $\frac{3}{4}$ d’une pizza, chacun reçoit $\frac{1}{4}$ de $\frac{3}{4}$ de la pizza, c’est-à-dire $\frac{1}{4}$ ¥ $\frac{3}{4}$, ou $\frac{3}{16}$ de la pizza.

RÉPONSE : (B)

10. On place côte à côte deux carrés, ayant chacun une aire de 25 cm^2, de manière à former un rectangle. Quel est le périmètre de ce rectangle?
(**A**) 30 cm (**B**) 25 cm (**C**) 50 cm (**D**) 20 cm (**E**) 15 cm

Solution
On place les deux carrés côte à côte pour obtenir le rectangle ci-contre. Ce rectangle a un périmètre de 30 cm.



RÉPONSE : (A)

Partie B

11. Ginette a couru une distance de 50 mètres, ce qui correspond à 25 % de la course. Quelle est la longueur de la course, en mètres?
(**A**) 100 (**B**) 1250 (**C**) 200 (**D**) 12,5 (**E**) 400

Solution
Puisque 50 mètres correspondent à 25 %, ou $\frac{1}{4}$ de la course, la longueur de la course est égale à 4 ¥ 50, ou 200 mètres.
RÉPONSE : (C)

12. Qaddama a 6 ans de plus que Gilles. Gilles a 3 ans de moins que Denis. Si Qaddama est âgée de 19 ans, quel est l'âge de Denis?
(**A**) 17 ans (**B**) 16 ans (**C**) 10 ans (**D**) 18 ans (**E**) 15 ans

Solution
Puisque Qaddama est âgée de 19 ans et qu'elle a 6 ans de plus que Gilles, Gilles a 13 ans. Puisque Gilles a 3 ans de moins que Denis, Denis a 16 ans.
RÉPONSE : (B)

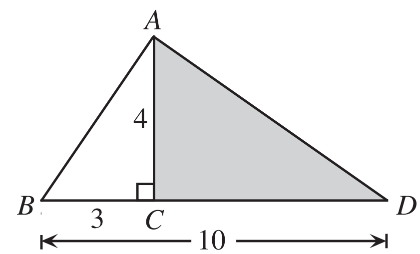
13. Un nombre palindrome est un nombre entier strictement positif qui peut être lu de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, 2002 est un palindrome. Quel est le plus petit nombre que l'on peut ajouter à 2002 pour obtenir un plus grand palindrome?
(**A**) 11 (**B**) 110 (**C**) 108 (**D**) 18 (**E**) 1001

Solution
On peut résoudre le problème de façon efficace en cherchant le premier palindrome après 2002. Ce palindrome doit avoir la forme $2aa2$ et puisque a doit être supérieur à 0, le palindrome suivant doit être 2112. Le plus petit nombre que l'on peut ajouter à 2002 est donc $2112 - 2002$, ou 110.
RÉPONSE : (B)

14. On attribue aux six premières lettres de l'alphabet les valeurs suivantes : A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, E = 5 et F = 6. La valeur d'un mot est égale à la somme des valeurs de ses lettres. Par exemple, la valeur du mot ABBE est $1+2+2+5$, ou 10. Lequel des mots suivants a la plus grande valeur?
(**A**) ABBE (**B**) FACE (**C**) FADE (**D**) DECA (**E**) CAFE

Solution
Les mots ont les valeurs suivantes :
ABBE : $1+2+2+5=10$ FACE : $6+1+3+5=15$ FADE : $6+1+4+5=16$
DECA : $4+5+3+1=13$ CAFE : $3+1+6+5=15$
FADE a la plus grande valeur. RÉPONSE : (C)

15. Dans le diagramme, on a $AC=4$, $BC=3$ et $BD=10$. L'aire du triangle ombré est égale à :
(**A**) 14 (**B**) 20 (**C**) 28
(**D**) 25 (**E**) 12



Solution
Puisque $BD=10$ et $BC=3$, alors $CD=7$. L'aire du triangle ombré est égale à $\frac{1}{2}(7)(4)$, ou 14.
RÉPONSE : (A)

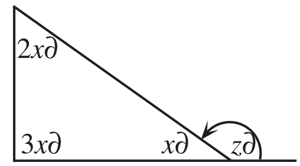
16. Dans les égalités suivantes, les lettres a, b et c représentent des nombres différents.

$$1^3=1$$
$$a^3=1+7$$
$$3^3=1+7+b$$
$$4^3=1+7+c$$

La valeur numérique de $a+b+c$ est :
(**A**) 58 (**B**) 110 (**C**) 75 (**D**) 77 (**E**) 79

Solution
Puisque $a^3=1+7$, alors $a^3=8$, d'où $a=2$.
Puisque $3^3=27$, la troisième égalité devient $27=8+b$, d'où $b=19$.
Puisque $4^3=64$, la quatrième égalité devient $64=8+c$, d'où $c=56$.
Donc $a+b+c=2+19+56$, ou 77. RÉPONSE : (D)

17. Dans le diagramme, la valeur de z est :
(**A**) 150 (**B**) 180 (**C**) 60
(**D**) 90 (**E**) 120



Solution
Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle égale 180∂, alors :

$$2x∂ + 3x∂ + x∂ = 180∂$$
$$6x∂ = 180∂$$
$$x = 30$$

Puisque les angles qui mesurent $x∂$ et $z∂$ forment un angle plat et que $x∂ = 30∂$, alors $z∂ = 150∂$.

Réponse : (A)

18. Un nombre parfait est un entier qui est égal à la somme de tous ses diviseurs positifs qui sont plus petits que lui. Par exemple, 28 est un nombre parfait car $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Lequel des nombres suivants est un nombre parfait?
(**A**) 10 (**B**) 13 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Solution
On vérifie chaque choix.

	Nombre	Diviseurs positifs	Somme des diviseurs qui sont plus petits
(A)	10	1, 2, 5, 10	$1 + 2 + 5 = 8$
(B)	13	1, 13	1
(C)	6	1, 2, 3, 6	$1 + 2 + 3 = 6$
(D)	8	1, 2, 4, 8	$1 + 2 + 4 = 7$
(E)	9	1, 3, 9	$1 + 3 = 4$

Le seul nombre parfait est 6. (Les deux nombres parfaits suivants, après 6 et 28, sont 496 et 8128.)

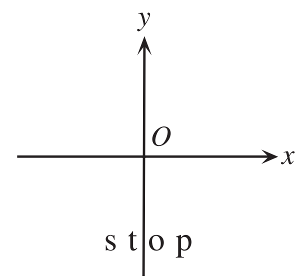
Réponse : (C)

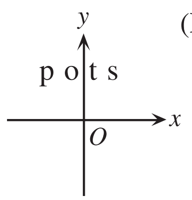
19. Sabine a écrit le numéro de téléphone de Davina dans son cahier de mathématiques. Plus tard, en corrigeant ses devoirs, elle a accidentellement effacé les deux derniers chiffres du numéro de téléphone. Il ne lui restait plus que 893-44_ _. Sabine tente alors de téléphoner à Davina en composant les numéros qui commencent par 893-44. Quel est le plus petit nombre d'appels qu'elle doit faire pour être certaine de rejoindre la maison de Davina?
(**A**) 100 (**B**) 90 (**C**) 10 (**D**) 1000 (**E**) 20

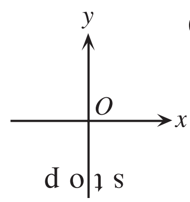
Solution
Le numéro de téléphone de Davina pourrait être n'importe quel numéro de 893-4400 à 893-4499. Il y a 100 tels numéros. Pour être certaine de rejoindre la maison de Davina, le plus petit nombre d'appels que Sabine doit faire est 100. On peut aussi s'y prendre d'une autre façon. Le numéro de Davina est de la forme 8 9 3 - 4 4 $\underline{a}$ $\underline{b}$ et il y a 10 possibilités pour le chiffre a. Pour chacune de ces possibilités, il y a 10 possibilités pour le chiffre b. Le nombre total de possibilités est donc égal à 10¥10, ou 100.

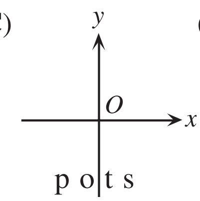
Réponse : (A)

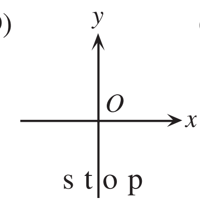
20. On place le mot « stop » dans la position illustrée dans le diagramme ci-contre. On lui fait subir une rotation de centre à l'origine O et de 180∂ dans le sens des aiguilles d'une montre, suivie d'une réflexion par rapport à l'axe des x. Lequel des diagrammes suivants représente l'image finale?

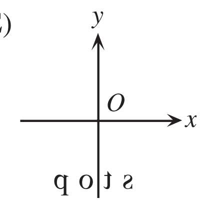


(**A**) 

(**B**) 

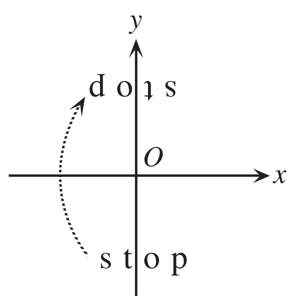
(**C**) 

(**D**) 

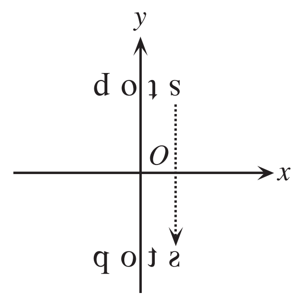
(**E**) 

Solution

Le premier diagramme illustre l'image par une rotation de 180°. Le deuxième diagramme illustre l'image de cette image par la réflexion.



Rotation de 180°



Réflexion par rapport à l'axe des x

RÉPONSE : (E)

Partie C

21. Cinq personnes participent à une réunion dans une salle. À la fin de la réunion, chaque personne serre la main de chaque autre personne dans la salle, une fois chacune. Combien y a-t-il eu de serrements de mains?

(**A**) 5 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 15 (**E**) 25

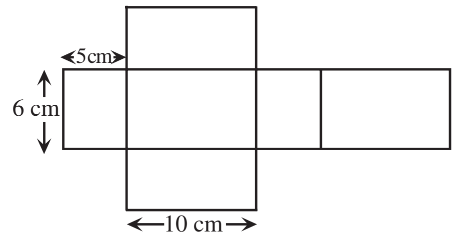
Solution

Chacune des cinq personnes serre la main de quatre autres personnes, ce qui fait 20 serrements de mains. Or on a compté chaque serrement de mains deux fois (p. ex., on a compté A qui serre la main de B et B qui serre la main de A). Il faut donc diviser le nombre par 2, ce qui donne 10 serrements de mains en tout.

RÉPONSE : (B)

22. On peut plier la figure ci-contre le long des lignes pour former un prisme à base rectangulaire. L'aire totale de la surface du prisme, en centimètres carrés, est égale à :

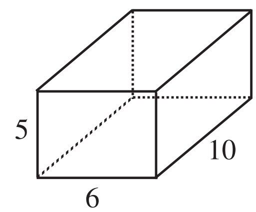
(**A**) 312 (**B**) 300 (**C**) 280
(**D**) 84 (**E**) 600



Solution

L'aire totale de la surface est égale à $2(5\times6+5\times10+6\times10)$, ou 280 cm^2.

On peut aussi construire le prisme illustré ci-contre. Toutes les faces sont des rectangles. Deux rectangles ont une aire de 30 cm^2, deux rectangles ont une aire de 50 cm^2 et deux rectangles ont une aire de 60 cm^2. L'aire totale est égale à 280 cm^2.



Réponse : (C)

23. Marc tient un sac qui contient 3 billes noires, 6 billes jaunes, 2 billes mauves et 6 billes rouges. Il ajoute ensuite un nombre de billes blanches aux autres billes du sac et il fait savoir à Suzanne que si elle choisit au hasard une bille dans le sac, la probabilité de choisir une bille jaune ou noire est égale à $\frac{3}{7}$. Le nombre de billes blanches que Marc a ajoutées à son sac est égal à :

(**A**) 5 (**B**) 2 (**C**) 6 (**D**) 4 (**E**) 3

Solution

Puisque la probabilité de choisir une bille jaune ou noire est égale à $\frac{3}{7}$, le nombre de billes dans le sac doit être un multiple de 7. Donc il y a peut-être 7, 14, 21, 28, … billes dans le sac. Puisqu'il y a 9 billes qui sont jaunes ou noires et que $\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$, il y a 21 billes dans le sac. Puisqu'il y avait 17 billes dans le sac au départ, Marc a ajouté 4 billes blanches à son sac.

On pourrait aussi représenter le nombre de billes blanches que Marc a ajoutées par l'inconnue *b*.
On aurait alors l'équation :

$$\frac{\text{Nombre de billes jaunes ou noires}}{\text{Nombre total de billes}}=\frac{3}{7}$$

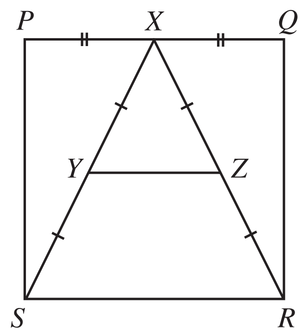
$$\frac{9}{17+b}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{9}{17+b}=\frac{9}{21} \quad \text{(on a choisi le même numérateur 9)}$$

On a donc $17+b=21$, d'où $b=4$.
Le nombre de billes blanches ajoutées est égal à 4. Réponse : (D)

24. *PQRS* est un carré avec des côtés de longueur 8. *X* est le milieu du côté *PQ*, tandis que *Y* et *Z* sont les milieux respectifs de *XS* et de *XR*. L'aire du trapèze *YZRS* est égale à :

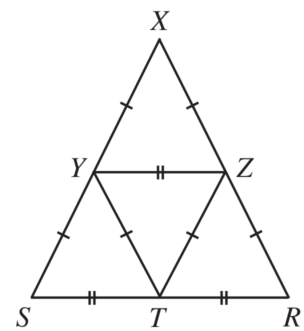
(**A**) 24 (**B**) 16 (**C**) 20
(**D**) 28 (**E**) 32



Solution

Le triangle *XSR* a une aire égale à $\frac{1}{2}(8)(8)$, ou 32. On choisit le milieu *T* du côté *SR* et on trace les segments *TY* et *TZ* pour obtenir le diagramme ci-contre.

Le triangle *XSR* est donc formé de 4 triangles identiques et l'aire de chacun est donc égale à $\frac{1}{4}(32)$, ou 8. Puisque le trapèze *YZRS* est formé de trois de ces triangles, son aire est égale à 3×8, ou 24.



RÉPONSE : (A)

25. Le produit des chiffres de l'entier 226 est égal à 24. Il en est de même pour l'entier 318. Combien y a-t-il d'entiers positifs de trois chiffres dont le produit des chiffres est égal à 24?

(**A**) 4 (**B**) 18 (**C**) 24 (**D**) 12 (**E**) 21

Solution

On détermine les façons de multiplier trois nombres d'un chiffre pour obtenir 24.

i) $24 = 1 \times 4 \times 6$
ii) $24 = 1 \times 3 \times 8$
iii) $24 = 2 \times 3 \times 4$
iv) $24 = 2 \times 2 \times 6$

Dans le cas i), on peut former 6 nombres avec ces chiffres, soit 146, 164, 416, 461, 614 et 641.
Il en est de même dans les cas ii) et iii).
Dans le cas iv), on peut former 3 nombres avec ces chiffres, soit 226, 262 et 622.
En tout, il y a $6 + 6 + 6 + 3$, ou 21 nombres possibles. RÉPONSE : (E)

∗∗∗∗∗