Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Solutions du Concours Hypatie 2004 (11e année ou Secondaire V)

1. a) *Solution 1*

Par factorisation :

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$(x+2)(x+3) = 0$$

Donc, $x + 2 = 0$ ou $x + 3 = 0$, d'où $x = -2$ ou $x = -3$.

Les racines sont –2 et –3.

Solution 2

On utilise la formule :

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}, \text{ ou } x == \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

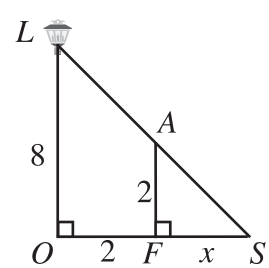
Donc, $x = \frac{-5+1}{2}$ ou $x = \frac{-5-1}{2}$, c'est-à-dire que $x = -2$ ou $x = -3$.

Les racines sont –2 et –3.

b) Si on ajoute 7 à chacune des racines de l'équation précédente, on obtient 5 et 4.
L'équation $(x-5)(x-4) = 0$, ou $x^2 - 9x + 20 = 0$, a ces nombres pour racines.

c) On détermine d'abord les racines de l'équation $(x-4)(3x^2 - x - 2) = 0$.
On a $x - 4 = 0$, d'où $x = 4$, ou $3x^2 - x - 2 = 0$.
On peut résoudre cette dernière équation par factorisation ou en utilisant la formule. Par factorisation, on obtient $(3x+2)(x-1) = 0$. Donc, $3x + 2 = 0$ ou $x - 1 = 0$, d'où $x = -\frac{2}{3}$ ou $x = 1$.
Les racines de l'équation donnée sont 4, $-\frac{2}{3}$ et 1. Si on ajoute 1 à chacune de ces racines, on obtient 5, $\frac{1}{3}$ et 2.
L'équation $(x-5)(3x-1)(x-2) = 0$, ou $(x-5)(3x^2 - 7x + 2) = 0$, ou
$3x^3 - 22x^2 + 37x - 10 = 0$ a ces nouveaux nombres pour racines. (On peut aussi construire beaucoup d'autres équations qui ont ces nombres pour racines.)

2. a) Dans la figure, *L* est le sommet du lampadaire, *O* est la base du lampadaire, *A* est le sommet de la tête d'Alain, *F* est le point sur terre où il se tient et *S* est l'extrémité de son ombre. On sait que *SO* est perpendiculaire à *AF* et à *LO* et que les points *L*, *A* et *S* sont alignés.
Le triangle *LOS* est semblable au triangle *AFS*, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun.



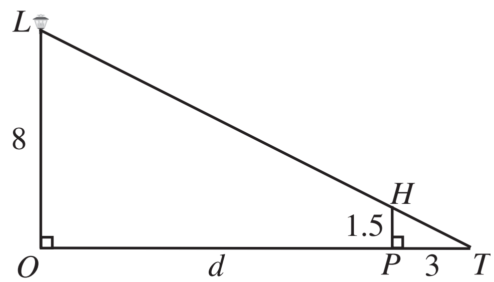
Donc : $\dfrac{LO}{SO} = \dfrac{AF}{SF}$

$$\frac{8}{2+x} = \frac{2}{x}$$
$$8x = 4 + 2x$$
$$6x = 4$$
$$x = \tfrac{2}{3}$$

L'ombre d'Alain a donc une longueur de $\frac{2}{3}$ m.

b) Dans la figure ci-dessous, L et O sont définis comme dans la partie a), H est le sommet de la tête de Béatrice, P est le point sur terre où elle se tient et T est l'extrémité de son ombre.
Comme dans la partie a), le triangle LOT est semblable au triangle HPT. Soit $d = OP$.
Donc :

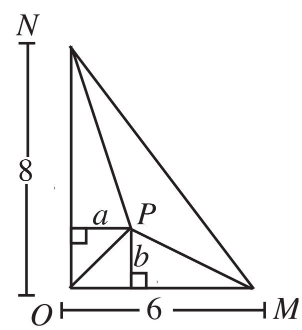
$$\frac{LO}{TO} = \frac{HP}{TP}$$
$$\frac{8}{d+3} = \frac{1{,}5}{3}$$
$$1{,}5d + 4{,}5 = 24$$
$$1{,}5d = 19{,}5$$
$$d = 13$$



Béatrice doit se placer à 13 m du lampadaire pour que son ombre mesure 3 m.

3. a) Puisque le triangle OMN est rectangle, son aire est égale à $\frac{1}{2}(OM)(ON)$, c.-à-d. à $\frac{1}{2}(8)(6)$, ou 24.

Pour que les triangles POM, PON et PMN aient la même aire, chacun doit avoir une aire de 8.
Le triangle POM a une base OM de longueur 6 et une hauteur correspondante de longueur b, soit la distance de P à OM. Puisque son aire est égale à 8, on a donc $\frac{1}{2}(6)b = 8$, d'où $b = \frac{8}{3}$.



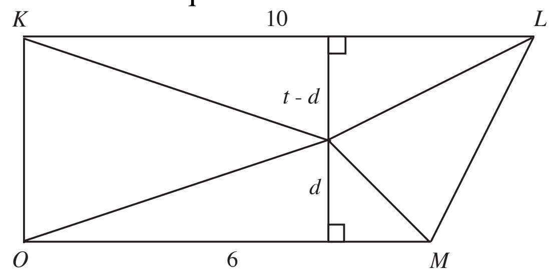
Le triangle PON a une base ON de longueur 8 et une hauteur correspondante de longueur a, soit la distance de P à ON. Puisque son aire est égale à 8, on a donc $\frac{1}{2}(8)a = 8$, d'où $a = 2$.
Si le point P a pour coordonnées $\left(2, \frac{8}{3}\right)$, les triangles POM et PON ont donc chacun une aire de 8. Le triangle PMN doit alors avoir une aire de 8, car le triangle OMN a une aire de 24.

b) On calcule d'abord l'aire du quadrilatère $OMLK$.

Il s'agit d'un trapèze ayant pour bases *OM* et *KL*. Son aire est égale à la moyenne des bases multipliée par la hauteur, soit $\frac{1}{2}(10+6)t$, ou $8t$.

Si les triangles *QOM*, *QML*, *QLK* et *QKO* ont la même aire, celle-ce doit égaler $2t$, puisque la somme de l'aire des triangles est égale à l'aire du quadrilatère.

Le triangle *QOM* a une base de longueur 6 et une hauteur correspondante de longueur d, soit la distance de Q à *OM*. Puisque son aire est égale à $2t$, on a donc $\frac{1}{2}(6)(d)=2t$, d'où $d=\frac{2}{3}t$.



Le triangle *QLK* a une base de longueur 10 et une hauteur correspondante de longueur $\frac{1}{3}t$, soit la distance de Q à *LK* (puisque l'ordonnée de Q est égale à $\frac{2}{3}t$). Puisque son aire est égale à $2t$, on a donc $\frac{1}{2}(10)\left(\frac{1}{3}t\right)=2t$, d'où $t=0$. Or, on donne $t>0$, ce qui veut dire qu'il est impossible pour l'aire de chacun des triangles *QOM* et *QLK* d'égaler $2t$. Il n'existe donc aucun point Q tel que l'aire des quatre triangles soit la même.

4. a) On résout le problème en examinant tous les cas possibles. Le triplet (V, J, R) indiquera le nombre respectif de boules vertes (V), jaunes (J) et rouges (R) qu'il reste dans le sac. Ainsi au départ, on a $(1,1,2)$.

Si la boule verte et la boule jaunes sont choisies au départ, on obtient $(0,0,3)$. Toutes les boules qui restent dans le sac sont donc rouges.

Si la boule verte et une boule rouge sont choisies au départ, on obtient $(0,2,1)$. Au tour suivant, on doit donc choisir une boule jaune et la boule rouge et on obtient alors $(1,1,0)$. Au tour suivant, on choisit la boule verte et la boule jaune et on obtient $(0,0,1)$. Il reste une boule rouge dans le sac.

De même, si on choisit la boule jaune et une boule rouge au départ, on obtient $(2,0,1)$. Au tour suivant, on doit choisir une boule verte et la boule rouge et on obtient $(1,1,0)$. Au tour suivant, on choisit la boule verte et la boule jaune et on obtient $(0,0,1)$. Il reste une boule rouge dans le sac.

Donc, dans tous les cas, il ne reste qu'une ou des boules rouges.

b) On pourrait considérer tous les cas, mais le nombre de cas possibles est très grand. On cherche alors une autre approche.

On remarque qu'à chaque tour, le nombre de boules de chaque couleur augmente ou diminue de 1. La parité de chaque nombre change donc à chaque tour, car elle change de pair à impair ou d'impair à pair.

Le nombre de boules vertes et le nombre de boules rouges doivent donc avoir la même parité et le nombre de boules jaunes doit avoir la parité opposée. (V et R sont impairs au départ, tandis que J est pair. Au tour suivant, V et R deviendront pairs et J deviendra impair, etc.)

À la fin, deux des variables vaudront 0, c'est-à-dire que deux des variables seront paires. Or, les seules variables qui peuvent être paires en même temps sont V et R. À la fin, on aura donc $V = 0$ et $R = 0$. La ou les boules qui restent à la fin sont donc toutes jaunes. (Puisque le nombre total de boules dans le sac *diminue* de 1 à chaque tour, il est certain que le jeu se terminera après 11 tours ou moins.)

c) *Solution 1*

Dans cette version du jeu, le nombre total de boules dans le sac ne change pas, car à chaque tour, on enlève deux boules et on en remet deux autres.

Supposons qu'on en venait à avoir 12 boules d'une même couleur.

On considère l'expression $V - J$, soit la différence entre le nombre de boules vertes et le nombre de boules jaunes. À la fin du jeu, on aurait 12 boules d'une même couleur et aucune boule des autres couleurs. L'expression $V - J$ pourrait donc être égale à 12, à 0 ou à –12.

Au départ, on a $V - J = -1$. On montrera que, quoi qu'il arrive lors d'un tour, la valeur de $V - J$ changera de 0 ou de 3. Ceci démontrera que $V - J$ ne pourra jamais être égale à 12, à 0 ou à –12, puisqu'on ne peut ajouter ou soustraire plusieurs fois le nombre 3 à –1 pour obtenir une valeur de 12, de 0 ou de –12. Il sera donc impossible d'obtenir toutes les boules d'une même couleur.

Supposons qu'après un tour particulier, on a $V = v$ et $J = j$, c'est-à-dire que $V - J = v - j$. Au tour suivant :

i) si on remplace une boule verte et une boule jaune par deux boules rouges, on a alors $G = g - 1$ et $J = j - 1$. Donc, $V - J = (v - 1) - (j - 1)$, c'est-à-dire que $V - J = v - j$. La valeur de l'expression $V - J$ ne change pas.

ii) si on remplace une boule verte et une boule rouge par deux boules jaunes, on a alors $V = v - 1$ et $J = j + 2$. Donc, $V - J = (v - 1) - (j + 2)$, c'est-à-dire que $V - J = v - j - 3$.

iii) si on remplace une boule jaune et une boule rouge par deux boules vertes, on a alors $V = v + 2$ et $J = j - 1$. Donc, $V - J = (v + 2) - (j - 1)$, c'est-à-dire que $V - J = v - j + 3$.

La valeur de $V - J$ peut donc seulement changer de 0 ou de 3. En partant d'une valeur de –1, $V - J$ ne peut donc jamais égaler 0, 12 ou –12. Il est donc impossible pour le sac de contenir que des boules d'une même couleur.

Solution 2

Puisque le nombre total de boules ne change pas, si le sac en venait à contenir que des boules d'une même couleur, il y aurait 12 boules d'une couleur et aucune boule des autres couleurs.

On suppose qu'il est possible d'obtenir 12 boules d'une couleur et aucune boule des autres couleurs. Dans la notation qui suit, les nombres de couleurs sont présentés en ordre décroissant. En procédant à rebours, on montrera qu'il est impossible d'en arriver à 5, 4, 3.

En procédant à rebours, on soustrait 2 d'un des nombres et on ajoute 1 aux deux autres.
Or, 12, 0, 0 doit provenir de 10, 1, 1.
10, 1, 1 doit provenir de 8, 2, 2.
8, 2, 2 doit provenir de 6, 3, 3 ou de 9, 3, 0.
9, 3, 0 doit provenir de 7, 4, 1 ou de 10, 1, 1.
7, 4, 1 doit provenir de 5, 5, 2 ou de 8, 2, 2.
5, 5, 2 doit provenir de 6, 6, 0 ou de 6, 3, 3.
6, 6, 0 doit provenir de 7, 4, 1.
6, 3, 3 doit provenir de 4, 4, 4 ou de 7, 4, 1.
4, 4, 4 doit provenir de 5, 5, 2.
Les triplets de nombres suivent donc des boucles et ne peuvent égaler que : 12, 0, 0; 10, 1, 1; 9, 3, 0; 8, 2, 2; 7, 4, 1; 6, 6, 0; 6, 3, 3; 5, 5, 2; 4, 4, 4.

En partant de la position 5, 4, 3, il est donc impossible d'obtenir 12, 0, 0.