

**Concours  
canadien  
de mathématiques**

*Une activité du Centre d'éducation en  
mathématiques et en informatique  
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario*

***Concours Pascal 2010***

*(9<sup>e</sup> année – Secondaire III)*

**le jeudi 25 février 2010**

*Solutions*

1. Les cinq choix correspondent à 50 ¢, 90 ¢, 95 ¢, 101 ¢ et 115 ¢.  
On vérifie la différence entre chacun de ces choix et 100 ¢ (soit 1 \$) :

$$100 - 50 = 50 \quad 100 - 90 = 10 \quad 100 - 95 = 5 \quad 101 - 100 = 1 \quad 115 - 100 = 15$$

Le quatrième choix nous donne la plus petite différence, soit 1 ¢. Donc, la somme de 1,01 \$ est la plus près de 1,00 \$.

RÉPONSE : (D)

2. On utilise la priorité des opérations :

$$\frac{(20 - 16) \times (12 + 8)}{4} = \frac{4 \times 20}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

RÉPONSE : (C)

3. On cherche le nombre de portions de 250 mL de farine dans 750 mL de farine. On a  $750 \div 250 = 3$ .  
Donc, il y a 3 portions de 250 mL de farine.  
Puisqu'il faut 50 mL pour chaque portion de 250 mL de farine, il faut 3 portions de 50 mL de lait, soit 150 mL de lait, car  $3 \times 50 = 150$ .

RÉPONSE : (C)

4. Il y a 8 figures en tout, dont 3 triangles. Il y a donc 3 choix favorables.  
Donc, la probabilité de choisir un triangle est égale à  $\frac{3}{8}$ .

RÉPONSE : (A)

5. On simplifie le membre de gauche et on exprime la réponse comme fraction ayant un numérateur de 1 :

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{2}{18} + \frac{1}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

Donc, le nombre 6 remplace le  $\square$ .

RÉPONSE : (C)

6. Le contour de la figure est formé de 16 segments horizontaux de longueur 1 et de 10 segments verticaux de longueur 1.  
Donc, le périmètre de la figure est égal à  $10 + 16$ , ou 26.  
(On aurait pu faire le tour de la figure en commençant à un coin et compter le nombre de segments.)

RÉPONSE : (E)

7. Puisque  $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 = 27$ , alors :

$$\sqrt{3^3 + 3^3 + 3^3} = \sqrt{27 + 27 + 27} = \sqrt{81} = 9$$

RÉPONSE : (B)

8. La différence des deux nombres est égale à  $7,62 - 7,46$ , ou 0,16.  
La portion de droite entre les deux nombres est divisée en 8 segments de même longueur.  
Chacun de ces segments a donc une longueur égale à  $0,16 \div 8$ , ou 0,02.  
Le point  $P$  est situé à trois segments à la droite du point 7,46.  
Le nombre représenté par le point  $P$  est donc égal à  $7,46 + 3(0,02)$ , ou  $7,46 + 0,06$ , ou 7,52.

RÉPONSE : (E)

9. Un quadrillage 12 sur 12 contiendra 11 lignes verticales intérieures et 11 lignes horizontales intérieures. (Dans le quadrillage 4 sur 4 donné, il y a 3 lignes verticales intérieures et 3 lignes horizontales intérieures.)

Chacune des 11 lignes verticales intérieures coupe chacune des 11 lignes horizontales intérieures pour créer un point d'intersection intérieur.

Ainsi chaque ligne intérieure verticale produit 11 points d'intersection intérieurs.

Le nombre de points d'intersection intérieurs est donc égal à  $11 \times 11$ , ou 121.

RÉPONSE : (B)

10. Puisque l'angle au centre du secteur « Moins de 1 » mesure  $90^\circ$ , alors la fraction des élèves qui consacrent moins d'une heure par jour à leurs devoirs est égale à  $\frac{90^\circ}{360^\circ}$ , ou  $\frac{1}{4}$ .

Donc, 25 % des élèves consacrent moins d'une heure par jour à leurs devoirs.

Donc, le pourcentage des élèves qui consacrent au moins une heure par jour à leurs devoirs est égal à  $100\% - 25\%$ , ou 75%.

RÉPONSE : (E)

11. *Solution 1*

Puisqu'il y a plus d'une table à quatre pieds, il y en a au moins deux.

Puisqu'il y a 23 pieds en tout, il y a moins de six tables à quatre pieds, puisque six de ces tables aurait un total de  $6 \times 4$  pieds, ou 24 pieds.

Il y a donc de 2 à 5 tables à quatre pieds.

S'il y a 2 tables à quatre pieds, elles contribuent  $2 \times 4$  pieds au total, ou 8 pieds. Il reste donc  $23 - 8$  pieds, ou 15 pieds pour les tables à trois pieds.

Puisque 15 est divisible par 3, le nombre de tables à trois pieds est égal à  $15 \div 3$ , ou 5.

(On peut vérifier que s'il y avait 3 ou 4 tables à quatre pieds, alors le nombre de pieds qu'il y aurait pour les tables à trois pieds ne serait pas divisible par 3 et que s'il y avait 5 tables à quatre pieds, alors il n'y aurait qu'une table à trois pieds, ce qui n'est pas permis.)

*Solution 2*

Puisqu'il y a plus d'une table de chaque sorte, il y a au moins 2 tables à quatre pieds et 2 tables à trois pieds.

En tout, ces 4 tables ont un total de  $2(3) + 2(4)$  pieds, ou 14 pieds.

Le nombre de pieds qu'il reste est égal à  $23 - 14$ , ou 9.

La seule façon d'obtenir un total de 9 en additionnant des 4 et des 3 est d'utiliser trois fois 3.

Le nombre de tables à trois pieds est donc égal à  $2 + 3$ , ou 5.

RÉPONSE : (E)

12. *Solution 1*

L'aire du rectangle est égale à  $3 \times 4$ , ou 12.

L'aire totale des régions ombrées est égale à l'aire du rectangle moins l'aire de la région non ombrée.

La région non ombrée est un triangle qui a une base de 1 et une hauteur de 4. Son aire est donc égale à  $\frac{1}{2}(1)(4)$ , ou 2.

Donc, l'aire totale des régions ombrées est égale à  $12 - 2$ , ou 10.

*Solution 2*

Le triangle ombré à gauche a une base de 2 et une hauteur de 4. Son aire est donc égale à  $\frac{1}{2}(2)(4)$ , ou 4. Le triangle ombré à droite (au-dessus) a une base de 3 et une hauteur de 4. Son aire est

donc égale à  $\frac{1}{2}(3)(4)$ , ou 6.

Donc, l'aire totale des régions ombrées est égale à  $4 + 6$ , ou 10.

RÉPONSE : (C)

13. Puisque le rapport du nombre de garçons au nombre de filles à l'école secondaire Cayley est de  $3 : 2$ , alors  $\frac{3}{5}$  des élèves de l'école Cayley sont des garçons (car  $\frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$ ).

Le nombre de garçons à l'école Cayley est donc égal à  $\frac{3}{5}(400)$ , c'est-à-dire  $3(\frac{400}{5})$ , ou 240.

Le nombre de filles à l'école Cayley est donc égal à  $400 - 240$ , ou 160.

Puisque le rapport du nombre de garçons au nombre de filles à l'école secondaire Fermat est de  $2 : 3$ , alors  $\frac{2}{5}$  des élèves de l'école Fermat sont des garçons (car  $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$ ).

Le nombre de garçons à l'école Fermat est donc égal à  $\frac{2}{5}(600)$ , c'est-à-dire  $2(\frac{600}{5})$ , ou 240.

Le nombre de filles à l'école Fermat est donc égal à  $600 - 240$ , ou 360.

Le nombre total de garçons dans les deux écoles est égal à  $240 + 240$ , ou 480. Le nombre total de filles dans les deux écoles est égal à  $160 + 360$ , ou 520.

Le rapport du nombre total de garçons au nombre total de filles est donc égal à  $480 : 520$ , ou  $48 : 52$ , ou  $12 : 13$ .

RÉPONSE : (B)

14. Lorsque le développement est plié pour former un cube, la face numéro 5 est opposée à la face numéro 1. Les quatre autres faces partagent donc une arête avec la face numéro 1.

Le produit des nombres sur ces quatre faces est égal à  $2 \times 3 \times 4 \times 6$ , ou 144.

RÉPONSE : (B)

15. On sait que  $10\%$  est équivalent à la fraction  $\frac{1}{10}$ .

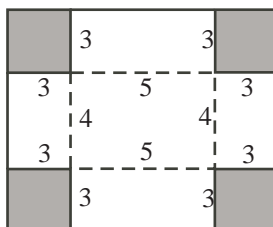
Donc  $t = \frac{1}{10}s$ , d'où  $s = 10t$ .

RÉPONSE : (D)

16. Puisque la base de la boîte mesure 5 cm sur 4 cm, la base a une aire de  $5(4)$  cm<sup>2</sup>, ou 20 cm<sup>2</sup>.

Puisque la boîte a un volume de 60 cm<sup>3</sup> et que sa base a une aire de 20 cm<sup>2</sup>, alors la boîte a une hauteur de 3 cm, car  $3 \times 20 = 60$  ou  $\frac{60}{20} = 3$ .

Donc, chacun des carrés ombrés a des côtés de longueur 3 cm, puisque des côtés de ces carrés forment les arêtes verticales de la boîte.



La feuille de carton initiale a donc une longueur de  $3 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 3 \text{ cm}$ , ou 11 cm, et une largeur de  $3 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 3 \text{ cm}$ , ou 10 cm. Son aire est donc égale à  $11(10)$  cm<sup>2</sup>, ou 110 cm<sup>2</sup>.

RÉPONSE : (B)

17. *Solution 1*

Puisque  $SUR$  est un segment de droite, alors  $\angle RUV = 180^\circ - \angle SUV$ , d'où  $\angle RUV = 180^\circ - 120^\circ$ , ou  $\angle RUV = 60^\circ$ .

Puisque  $PW$  est parallèle à  $QX$ , alors  $\angle RVW = \angle VTX = 112^\circ$ .

Puisque  $UVW$  est un segment de droite, alors  $\angle RVU = 180^\circ - \angle RVW$ , ou  $\angle RVU = 180^\circ - 112^\circ$ , ou  $\angle RVU = 68^\circ$ .

Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de  $180^\circ$ , alors :

$$\angle URV = 180^\circ - \angle RUV - \angle RVU = 180^\circ - 60^\circ - 68^\circ = 52^\circ$$

*Solution 2*

Puisque  $SUR$  est un segment de droite, alors  $\angle RUV = 180^\circ - \angle SUV$ , ou  $\angle RUV = 180^\circ - 120^\circ$ , ou  $\angle RUV = 60^\circ$ .

Puisque  $PW$  est parallèle à  $QX$ , alors  $\angle RST = \angle RUV = 60^\circ$ .

Puisque  $STX$  est un segment de droite, alors  $\angle RTS = 180^\circ - \angle VTX$ , ou  $\angle RTS = 180^\circ - 112^\circ$ , ou  $\angle RTS = 68^\circ$ .

Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de  $180^\circ$ , alors :

$$\angle URV = \angle SRT = 180^\circ - \angle RST - \angle RTS = 180^\circ - 60^\circ - 68^\circ = 52^\circ$$

RÉPONSE : (A)

18. *Solution 1*

Lorsque Catherine ajoute 30 litres d'essence, le réservoir passe de  $\frac{1}{8}$  de sa capacité à  $\frac{3}{4}$  de sa capacité. Puisque  $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ , alors  $\frac{5}{8}$  de la capacité correspond à 30 litres. Donc,  $\frac{1}{8}$  de la capacité du réservoir correspond à 6 litres (car  $30 \div 5 = 6$ ). Donc, le réservoir plein correspond à 48 litres d'essence (car  $8 \times 6 = 48$ ).

Pour remplir le dernier quart du réservoir, Catherine doit ajouter 12 litres d'essence (car  $\frac{1}{4}$  de  $48 = 12$ ). Puisque chaque litre coûte 1,38 \$, Catherine devra dépenser  $12 \times 1,38$  \$, ou 16,56 \$.

*Solution 2*

Soit  $x$  litres la capacité du réservoir de la voiture.

Lorsque Catherine ajoute 30 litres d'essence, le réservoir passe de  $\frac{1}{8}$  de sa capacité à  $\frac{3}{4}$  de sa capacité. Donc  $\frac{1}{8}x + 30 = \frac{3}{4}x$ , d'où  $\frac{5}{8}x = 30$ , ou  $x = 48$ .

Le dernier quart du réservoir correspond à  $\frac{1}{4}x$  litres, soit  $\frac{1}{4}(48)$  litres, ou 12 litres.

Puisque chaque litre coûte 1,38 \$, Catherine devra dépenser  $12 \times 1,38$  \$, ou 16,56 \$.

RÉPONSE : (C)

19. Un demi-disque de rayon  $r$  a une aire de  $\frac{1}{2}\pi r^2$ . Donc, un demi-disque de diamètre  $d$  a une aire égale à  $\frac{1}{2}\pi(\frac{1}{2}d)^2$ , ou  $\frac{1}{8}\pi d^2$ .

Les demi-disques de rayons  $UV$ ,  $VW$ ,  $WX$ ,  $XY$  et  $YZ$  ont tous le même diamètre et donc la même aire. Chacun a une aire égale à  $\frac{1}{8}\pi(5^2)$ , ou  $\frac{25}{8}\pi$ .

Le diamètre  $UZ$  du grand demi-disque est égal à  $5(5)$ , ou 25. Son aire est donc égale à  $\frac{1}{8}\pi(25^2)$ , ou  $\frac{625}{8}\pi$ .

L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du grand demi-disque moins l'aire de deux petits demi-disques plus l'aire de trois petits demi-disques, ce qui équivaut à l'aire du grand demi-disque plus l'aire d'un petit demi-disque.

L'aire de la région ombrée est donc égale à  $\frac{625}{8}\pi + \frac{25}{8}\pi$ , ou  $\frac{650}{8}\pi$ , ou  $\frac{325}{4}\pi$ .

RÉPONSE : (A)

20. La somme des entiers impairs de 5 à 21 est égale à :

$$5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 117$$

Donc, la somme des nombres dans n'importe quelle rangée est égale à un tiers de cette somme, soit 39.

La somme des nombres dans n'importe quelle colonne ou n'importe quelle diagonale est aussi égale à 39.

Puisque les nombres de la 2<sup>e</sup> rangée ont une somme de 39, alors le 2<sup>e</sup> nombre est égal à 13, car  $9 + 13 + 17 = 39$ .

Puisque les nombres de la 2<sup>e</sup> colonne ont une somme de 39, alors le 3<sup>e</sup> nombre est égal à 21, car  $5 + 13 + 21 = 39$ .

	5	
9	13	17
$x$	21	

Puisque les nombres de la 3<sup>e</sup> rangée ont une somme de 39, alors le 3<sup>e</sup> nombre est égal à  $39 - x - 21$ , ou  $18 - x$ .

Puisque les nombres de la diagonale qui contient  $x$  ont une somme de 39, alors le nombre de la case supérieure droite est égal à  $39 - x - 13$ , ou  $26 - x$ .

Puisque les nombres de la 3<sup>e</sup> colonne ont une somme de 39, alors  $(26 - x) + 17 + (18 - x) = 39$ , d'où  $61 - 2x = 39$ , ou  $2x = 22$ , ou  $x = 11$ .

Le carré magique au complet est donc :

19	5	15
9	13	17
11	21	7

RÉPONSE : (B)

21. Soit  $y$  et  $z$  les deux nombres dans les cases ombrées vides. De gauche à droite, les nombres sont donc 8,  $y$ ,  $z$ , 26,  $x$ .

Puisque la moyenne de  $z$  et de  $x$  est égale à 26, alors  $x + z = 2(26)$ , ou  $x + z = 52$ . Donc  $z = 52 - x$ . Les nombres, dans l'ordre, sont donc 8,  $y$ ,  $52 - x$ , 26,  $x$ .

Puisque la moyenne de 26 et de  $y$  est égale à  $52 - x$ , alors  $26 + y = 2(52 - x)$ , d'où  $y = 104 - 26 - 2x$ , ou  $y = 78 - 2x$ . Les nombres, dans l'ordre, sont donc 8,  $78 - 2x$ ,  $52 - x$ , 26,  $x$ .

Puisque la moyenne de 8 et de  $52 - x$  est égale à  $78 - 2x$ , alors :

$$\begin{aligned} 8 + (52 - x) &= 2(78 - 2x) \\ 60 - x &= 156 - 4x \\ 3x &= 96 \\ x &= 32 \end{aligned}$$

Donc  $x = 32$ .

RÉPONSE : (D)

22. Puisque  $JKLM$  est un rectangle, les angles  $J$  et  $K$  sont droits et les triangles  $SJP$  et  $QKP$  sont rectangles.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle  $SJP$  :

$$SP^2 = JS^2 + JP^2 = 52^2 + 39^2 = 2704 + 1521 = 4225$$

Puisque  $SP > 0$ , alors  $SP = \sqrt{4225}$ , d'où  $SP = 65$ .

Puisque  $PQRS$  est un losange, alors  $PQ = PS = 65$ .

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle  $QKP$  :

$$KP^2 = PQ^2 - KQ^2 = 65^2 - 25^2 = 4225 - 625 = 3600$$

Puisque  $KP > 0$ , alors  $KP = \sqrt{3600}$ , d'où  $KP = 60$ .

(Au lieu d'utiliser le théorème de Pythagore, on aurait pu dire que le triangle  $SJP$  est semblable au triangle rectangle remarquable 3-4-5 (ses cathètes mesurent  $13 \times 3$  et  $13 \times 4$  et l'hypoténuse mesure donc  $13 \times 5$ ) et que le triangle  $SJP$  est semblable au triangle rectangle remarquable 5-12-13, d'où  $KP = 5 \times 12$ .)

Puisque  $KQ$  est parallèle à  $PZ$  et que  $PK$  est parallèle à  $WQ$ , alors  $PKQW$  est un rectangle. Donc  $PW = KQ = 25$ .

De même,  $JPZS$  est un rectangle, d'où  $PZ = JS = 52$ .

Donc  $WZ = PZ - PW$ , d'où  $WZ = 52 - 25$ , ou  $WZ = 27$ .

De plus,  $SYRM$  est un rectangle. Puisque  $JM$  est parallèle à  $KL$  (car  $JKLM$  est un rectangle), que  $JK$  est parallèle à  $ML$  et que  $PQ$  est parallèle à  $SR$  (car  $PQRS$  est un losange), alors  $\angle MSR = \angle KQP$  et  $\angle SRM = \angle QPK$ .

Puisque les triangles  $SMR$  et  $QKP$  ont deux paires d'angles congrus deux à deux, ils sont semblables. Puisque les hypoténuses ont la même longueur, les triangles doivent être congruents. Donc  $MR = KP = 60$ .

Donc  $ZY = SY - SZ = MR - JP$ , d'où  $ZY = 60 - 39$ , ou  $ZY = 21$ .

Donc, le périmètre du rectangle  $WXYZ$  est égal à  $2(21) + 2(27)$ , ou 96.

RÉPONSE : (D)

23. On remarque d'abord que  $2010 = 10(201) = 2(5)(3)(67)$ . Donc  $2010^2 = 2^2 3^2 5^2 67^2$ .

On considère  $N$  entiers positifs consécutifs de quatre chiffres.

Pour que le produit de ces  $N$  entiers soit divisible par  $2010^2$ , il faut que deux entiers différents soient divisibles par 67 (ce qui indique que la liste contient au moins 68 entiers) ou qu'un des entiers soit divisible par  $67^2$ .

Puisqu'on veut minimiser la valeur de  $N$  (et que tous les choix de réponse sont inférieurs à 68), on cherche une liste de nombres dont un des nombres est divisible par  $67^2$ , ou 4489.

Puisque les nombres ont quatre chiffres, les seuls multiples de 4489 qu'il faut considérer sont 4489 et 8978.

On considère d'abord une liste de  $N$  entiers consécutifs qui incluent le nombre 4489.

Puisque le produit des entiers doit admettre deux diviseurs 5 et que des entiers divisibles par 25 sont plutôt éloignés de 4489, il faut inclure dans la liste deux entiers divisibles par 5. Pour minimiser le nombre d'entiers dans la liste, on tente d'inclure 4485 et 4490.

Notre liste provisoire est donc 4485, 4486, 4487, 4488, 4489, 4490.

Le produit de ces nombres inclut deux diviseurs 67 (dans 4489), deux diviseurs 5 (dans 4485 et 4490), deux diviseurs 2 (dans 4486 et 4488) et deux diviseurs 3 (car 4485 et 4488 sont divisibles par 3). Donc, le produit de ces 6 entiers est divisible par  $2010^2$ .

Donc, la liste la plus courte qui contient 4489 a une longueur de 6.

On considère ensuite une liste de  $N$  entiers consécutifs qui incluent le nombre 8978. Cet entier a un voisin plutôt rapproché, soit 8975, qui admet deux diviseurs 5. On considère donc la liste 8975, 8976, 8977, 8978 et on vérifie si elle satisfait à la condition donnée.

Le produit de ces nombres inclut deux diviseurs 67 (dans 8978), deux diviseurs 5 (dans 8975) et deux diviseurs 2 (dans 8976). Dans cette liste, seul le nombre 8976 est divisible par 3, mais il n'est pas divisible par 9.

Pour obtenir un deuxième diviseur 3, il faut ajouter à la liste un autre nombre divisible par 3. On prolonge la liste d'un nombre, soit 8979, qui est divisible par 3.

Donc, le produit des nombres de la liste 8975, 8976, 8977, 8978, 8979 est divisible par  $2010^2$ . La liste a une longueur de 5. Donc, la plus petite valeur possible de  $N$  est 5.

(On signale qu'on peut vérifier rapidement si un entier est divisible par 3 en additionnant les chiffres et en vérifiant si cette somme est divisible par 3. Par exemple, les chiffres du nombre 8979 ont une somme de 33 ; puisque 33 est divisible par 3, alors 8979 est divisible par 3.)

RÉPONSE : (A)

24. Soit  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2009}, x_{2010}$  les termes de la suite.

Soit  $S$  la somme de chaque deuxième terme, en commençant par le premier et en terminant par l'avant dernier. Donc :

$$S = x_1 + x_3 + x_5 + \dots + x_{2007} + x_{2009}$$

On sait que la somme de tous les termes est égale à 5307, c'est-à-dire que :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2009} + x_{2010} = 5307$$

On compare ensuite les termes comme suit : le deuxième au premier, le quatrième au troisième, le sixième au cinquième, et ainsi de suite. Dans chaque cas, le nombre qui suit est 1 de plus que le nombre précédent, c'est-à-dire que  $x_2 = x_1 + 1$ ,  $x_4 = x_3 + 1$ ,  $x_6 = x_5 + 1$  et ainsi de suite.

Donc, chacun des 1005 termes  $x_2, x_4, x_6, \dots$  est 1 de plus que le terme correspondant de la liste  $x_1, x_3, x_5, \dots$

Donc  $x_2 + x_4 + x_6 + \dots + x_{2010}$  est 1005 de plus que  $x_1 + x_3 + x_5 + \dots + x_{2009}$ .

Donc  $x_2 + x_4 + x_6 + \dots + x_{2010} = S + 1005$ .

Puisque la somme de tous les termes est égale à la somme de  $x_1 + x_3 + x_5 + \dots + x_{2009}$  plus la somme de  $x_2 + x_4 + x_6 + \dots + x_{2010}$ , ou  $S + 1005$ , elle est égale à  $S + (S + 1005)$ . Donc  $S + (S + 1005) = 5307$ , d'où  $2S = 4302$ , ou  $S = 2151$ .

Donc, si on additionne chaque deuxième terme, en commençant par le premier et en terminant par l'avant dernier, on obtient une somme de 2151.

RÉPONSE : (C)

25. Avant de répondre, on détermine le nombre de façons qu'il y a de choisir 2 objets parmi 5 objets et le nombre de façons qu'il y a de choisir 3 objets parmi 5.

On considère 5 objets, B, C, D, E et F.

Les choix de 2 de ces 5 objets sont : BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF et EF. Il y en a 10. Les choix de 3 de ces 5 objets sont : DEF, CEF, CDF, CDE, BEF, BDF, BDE, BCF, BCE et BCD. Il y en a 10.

(Pouvez-vous voir pourquoi il y a autant de choix de 3 objets que de choix de 2 objets ?)

Soit A, B, C, D, E et F les six équipes.

On considère l'équipe A.

L'équipe A joue trois parties. Il faut donc choisir 3 des 5 autres équipes qui peuvent jouer contre elle. On a vu qu'il y a 10 façons de le faire.

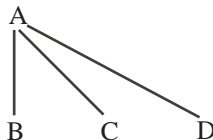
On considère maintenant un de ces 10 choix de 3 équipes. Disons que l'équipe A joue contre les



équipes B, C et D.

On tient compte des possibilités en utilisant une figure dans laquelle chaque joute est indiquée par une ligne qui joint deux équipes.

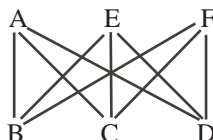
Jusqu'à présent, on a :



Deux possibilités se présentent : il n'y a aucune rencontre entre les équipes B, C et D ou il y a au moins une rencontre entre les équipes B, C et D.

1<sup>er</sup> cas : Il n'y a aucune rencontre entre les équipes B, C et D.

Dans la figure précédente, chacune des équipes B, C et D joue deux autres parties. Puisqu'elles ont rencontré A et qu'elle ne se rencontrent pas entre elles, chacune doit donc rencontrer E et F. On a donc :



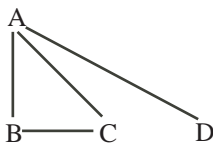
Dans cette figure, chaque équipe joue trois fois et la figure représente donc un programme complet.

Or, l'équipe A peut rencontrer 10 choix différents de 3 équipes, ce qui fait qu'il y a 10 programmes possibles dans ce cas.

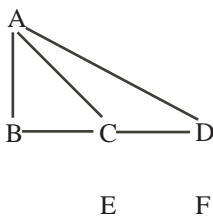
2<sup>e</sup> cas : Il y a au moins une rencontre entre les équipes B, C et D.

Il y a 3 choix pour une de ces rencontres, soit BC, BD ou CD.

On considère la rencontre BC.

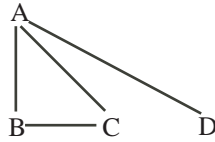


Il est maintenant impossible pour l'équipe B ou C de rencontrer l'équipe D. En effet, si C rencontrait D, par exemple, on aurait la situation suivante :



Dans cette situation, les équipes A et C ont chacune joué 3 parties, les équipes B et D en ont chacune joué 2 et les équipes E et F n'en ont joué aucune. Il est alors impossible pour les équipes B et D de jouer exactement 3 parties, car les adversaires possibles de E sont B, D et F, tandis que les adversaires possibles de F sont B, D et E, ce qui ferait que B et D joueraient 4 parties. Un argument semblable indique qu'il est impossible pour B de rencontrer D.

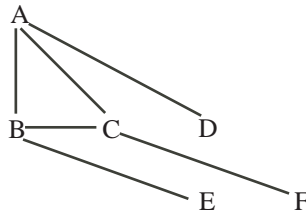
On a donc la situation suivante :



Dans cette situation, l'équipe A a joué 3 parties, les équipes B et C ont joué 2 parties et l'équipe D a joué 1 partie.

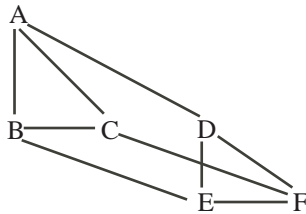
Les équipes B et C doivent jouer une autre partie, sans rencontrer l'équipe D ou l'équipe A. Elles doivent donc rencontrer les équipes E et F dans un ordre quelconque. Il y a 2 façons de le faire (BE et CF ou bien BF et CE.) À date, dans le 2<sup>e</sup> cas, il y a  $3 \times 2$  programmes, ou 6 programmes.

Supposons que B rencontre E et que C rencontre F.



À date, les équipes A, B et C ont chacune joué 3 parties, tandis que les équipes E, F et D ont chacune joué 1 partie.

La seule façon de terminer le programme est de joindre D, E et F.



En partant du choix des équipes B, C et D comme adversaires de A, il y a donc 6 programmes possibles. Puisqu'il y a 10 choix possibles comme adversaires de A, il y a un total de  $10 \times 6$  programmes, ou 60 programmes dans le 2<sup>e</sup> cas.

En tout, il y a  $10 + 60$  programmes possibles, ou 70 programmes possibles.

RÉPONSE : (E)

