Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2017

le mercredi 22 novembre 2017
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 23 novembre 2017
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. On a :

$$\frac{6}{3} \times \frac{9}{6} \times \frac{12}{9} \times \frac{15}{12} = \frac{6\times9\times12\times15}{3\times6\times9\times12} = \frac{(6\times9\times12)\times15}{3\times(6\times9\times12)} = \frac{15}{3} = 5$$

Réponse : 5

2. *Solution 1*
Puisque le triangle AEF est rectangle en E, son aire est égale à $\frac{1}{2}(AE)(EF)$.
Puisque le triangle AEF est rectangle en E et que $ABCD$ est un carré, alors $EF = AD = 8$ cm.
On sait que l'aire du triangle AEF est 30 % de celle du carré $ABCD$. L'aire du triangle AEF est donc égale à $0{,}3(8 \text{ cm})^2$.
Donc $\frac{1}{2}(AE)(8 \text{ cm}) = 0{,}3(8 \text{ cm})^2$, d'où $AE = 2(0{,}3)(8 \text{ cm})$, ou $AE = 0{,}6(8 \text{ cm})$, ou $AE = 4{,}8$ cm.

Solution 2
Puisque le triangle AEF est rectangle en E et que $ABCD$ est un carré, alors EF est parallèle à AD et $AEFD$ est donc un rectangle.
Puisque AF est une diagonale du rectangle $AEFD$, l'aire du rectangle $AEFD$ est le double de celle du triangle AEF, ou 60 % de l'aire du carré.
Puisque le rectangle $AEFD$ et le carré $ABCD$ ont la même hauteur, la longueur de AE doit être 60 % de celle de AB.
Donc $AE = 0{,}6 \cdot AB$, ou $AE = 0{,}6 \cdot 8$ cm, ou $AE = 4{,}8$ cm.

Réponse : 4,8 cm

3. On factorise le membre de gauche pour obtenir les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x &= 0 \\ x(x^3 - 3x^2 + x - 3) &= 0 \\ x[x^2(x-3) + (x-3)] &= 0 \\ x(x-3)[x^2+1] &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = 0$ ou $x - 3 = 0$ (d'où $x = 3$) ou $x^2 + 1 = 0$ (qui n'admet aucune solution réelle).
Les valeurs réelles de x qui vérifient l'équation sont 0 et 3.

Réponse : $x = 0$ et $x = 3$

4. *Solution 1*
Puisque les deux 1 ne peuvent être en positions adjacentes, ils peuvent être placés dans les paires de positions suivantes, en lisant de gauche à droite : 1re et 3e, 1re et 4e, 1re et 5e, 2e et 4e, 2e et 5e, 3e et 5e.
Il y a donc 6 paires de telles positions.
On choisit une de ces paires, disons la 1re et la 3e. On a ainsi le nombre 1_1_ _.
Il reste 3 chiffres à placer, qu'on placera de gauche à droite.
Il y a 3 chiffres qu'on peut placer dans la première position vide.
Pour chacun de ces choix, il y a 2 chiffres qu'on peut placer dans la position vide suivante.
Pour chacun de ces choix, il reste 1 chiffre que l'on place dans la dernière position vide.
On procède de la même manière pour chaque paire de positions possibles des deux 1.
Le nombre total d'entiers possibles de cinq chiffres est égal à $6 \times 3 \times 2$, ou 36 (6 paires de positions pour les deux 1, 3 choix pour la première position vide et 2 choix pour la deuxième position vide).

Solution 2

Puisqu'il y a 5 chiffres dont 2 sont identiques, le nombre de permutations est égal à $\frac{5!}{2!}$, ou $\frac{120}{2}$, ou par 60.

Pour le confirmer, on remplace un des 1 par X. Les cinq chiffres sont donc $1, 2, 3, 4$ et X. Il y a alors 5 choix pour le premier chiffre, 4 choix pour le deuxième et ainsi de suite pour un nombre total de permutations égal à 5!, ou $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, ou 120.
Si on remplace le X par un 1, on voit que chaque permutation parait 2 fois. Par exemple, $43X21$ et $4312X$ deviennent respectivement 43121 et 43121.
Puisque chaque permutation a été comptée deux fois, il faut donc diviser 120 par 2, ou 2!.

Dans certaines de ces permutations, les deux 1 paraitront en positions adjacentes.
On comptera donc le nombre de telles permutations et on le soustraira du total de 60.
Si on place les deux 1 en positions adjacentes, on peut considérer 11 comme un objet. On a donc 4 objets, soit 11, 2, 3, 4.
Il y a 4! permutations, ou 24 permutations de ces 4 objets.
Le nombre de permutations des chiffres 1, 1, 2, 3 et 4 où les deux 1 ne sont pas en positions adjacentes est donc égal à $60 - 24$, ou 36.

Réponse : 36

5. On remarque que le premier point $(0, 0)$, qui correspond à l'entier 1, est situé sur la droite d'équation $y = -x$.
Dans la figure, la spirale à partir de l'origine est formée de segments de longueurs 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...
On voit que les points de cette spirale qui sont situés sur la droite d'équation $y = -x$ sont ceux qui surviennent à chaque fois qu'un nombre pair de segments ont été tracés. (Par exemple, le nombre 3 correspond au point $(1, -1)$ après le 2^e^ segment, le nombre 7 correspond au point $(-1, 1)$ après le 4^e^ segment, le nombre 13 correspond au point $(2, -2)$ après le 6^e^ segment et ainsi de suite.)
Pour le démontrer, on remarque qu'après $2k$ segments, k étant n'importe quel entier strictement positif, l'abscisse du point correspondant est égale à

$$x = 1 - 2 + 3 - \ldots + (-1)^{k-1}k$$

et son ordonnée est égale à :

$$y = -1 + 2 - 3 + \ldots + (-1)^{k}k$$

En effet, les segments horizontaux ont pour longueurs 1, 2, 3, ..., k et vont vers la droite, la gauche, la droite, la gauche et ainsi de suite ; les segments verticaux ont pour longueurs 1, 2, 3, ..., k et vont vers le bas, le haut, le bas, le haut et ainsi de suite.
Puisque $-1 + 2 - 3 + \ldots + (-1)^k k = -(1 - 2 + 3 - \ldots + (-1)^{k-1}k)$, ces points sont situés sur la droite d'équation $y = -x$.
On remarque aussi qu'aucun autre point de la spirale n'est situé sur la droite d'équation $y = -x$, puisque chaque deuxième point au bout d'un segment est situé sur la droite et qu'un segment qui émane d'un point sur la droite doit s'éloigner de la droite pour aboutir hors de la droite.
Au point après $2k$ segments, l'entier correspondant est égal à :

$$1+(1+1+2+2+3+3+\ldots+k+k) = 1+2(1+2+3+\ldots+k) = 1+2\left(\tfrac{1}{2}k(k+1)\right) = 1+k+k^2$$

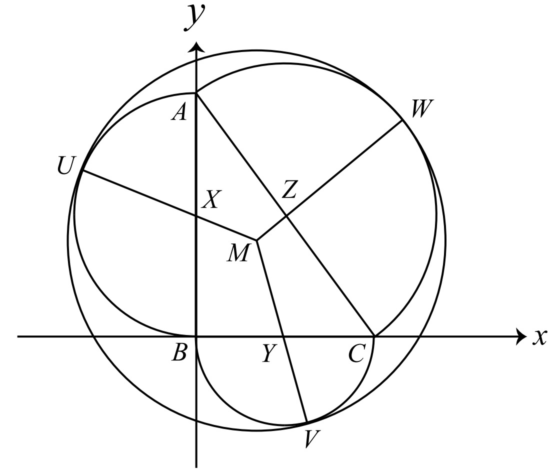
On veut déterminer la somme des valeurs de cette expression à partir de $k = 1$ jusqu'à la dernière qui est inférieure ou égale à 1000.
Les valeurs de l'expression augmentent à mesure que k aumente (puisque k^2 et k sont toutes deux croissantes). De plus, lorsque $k = 31$, on a $1 + k + k^2 = 993$ et lorsque $k = 32$, on a $1 + k + k^2 = 1057$.
On veut donc calculer les valeurs de l'expression $1 + k + k^2$ de $k = 0$ à $k = 31$. (On commence à $k = 0$ pour inclure l'entier 1, car $1 = 1 + 0 + 0^2$.)
On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{31}(1+k+k^2) &= (1+0+0^2)+(1+1+1^2)+(1+2+2^2)+(1+3+3^2)+\cdots+(1+31+31^2)\\ &= 32\cdot 1+(1+2+3+\cdots+31)+(1^2+2^2+3^2+\cdots+31^2)\\ &= 32+\tfrac{1}{2}(31)(32)+\tfrac{1}{6}(31)(32)(63)\\ &\qquad\text{(on a utilisé des formules bien connues)}\\ &= 32+496+10\,416\\ &= 10\,944\end{aligned}$$

(La notation dans le membre de gauche de la première ligne est appelée *notation sigma*. Elle représente la somme qui parait dans le membre de droite de cette première ligne.)
Tous les entiers de 1 à 1000 qui sont écrits sur les points situés sur la droite d'équation $y = -x$ ont une somme de 10 944.

Réponse : 10 944

6. Puisque $6^2 + 8^2 = 10^2$ (car $36 + 64 = 100$), le triangle donné est rectangle.
On nomme ce triangle ABC, où $AB = 8$, $BC = 6$ et $AC = 10$.
On le place dans le plan cartésien avec B à l'origine $(0, 0)$, A au point $(0, 8)$ et C au point $(6, 0)$.
Soit X, Y et Z les milieux respectifs des côtés AB, BC et AC.
Puisque AB, BC et AC sont les diamètres des demi-cercles, alors X, Y et Z sont les centres des demi-cercles.
Puisque $AB = 8$, alors $AX = XB = 4$. Le demi-cercle correspondant a donc un rayon de 4.
De plus, X a pour coordonnées $(0, 4)$.
Puisque $BC = 6$, alors $BY = YC = 3$. Le demi-cercle correspondant a donc un rayon de 3.
De plus, Y a pour coordonnées $(3, 0)$.
Puisque $AC = 10$, alors $AZ = ZC = 5$. Le demi-cercle correspondant a donc un rayon de 5.
Puisque Z est le milieu du côté AC, que A a pour coordonnées $(0, 8)$ et que C a pour coordonnées $(6, 0)$, alors Z a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(0 + 6), \frac{1}{2}(8 + 0)\right)$, ou $(3, 4)$.
Soit $M(s, t)$ le centre du grand cercle et r son rayon.
Soit U, V et W les points où les demi-cercles de centres respectifs X, Y et Z, touchent le grand cercle.
On joint M aux points U, V et W.



Or, MU, MV et MW passent respectivement aux points X, Y et Z.

En effet, on imagine une tangente au grand cercle en U.
Puisque le grand cercle et le demi-cercle sont tangents en U, cette tangente est aussi une tangente au demi-cercle.
Puisque des rayons sont perpendiculaires aux tangentes, alors XU et MU (tous deux des rayons) sont perpendiculaires à la tangente.
Puisque XU et MU sont perpendiculaires à la tangente, ils doivent être superposés et MU passe donc au point X.
On utilise un argument semblable pour démontrer que MV passe au point Y et que MW passe au point Z.

Puisque $MU = MV = MW = r$ (le rayon du grand cercle), et que $XU = 4$, $YV = 3$ et $ZW = 5$ (les rayons des demi-cercles), alors :

$$\begin{aligned} MX &= MU - XU = r - 4 \\ MY &= MV - YV = r - 3 \\ MZ &= MW - ZW = r - 5 \end{aligned}$$

Les points M, X, Y et Z ont pour coordonnées $M(s,t)$, $X(0,4)$, $Y(3,0)$ et $Z(3,4)$.
On obtient les trois équations suivantes en utilisant MX^2, MY^2 et MZ^2. Les membres de droite proviennent des expressions ci-haut et les membres de gauche proviennent des distances entre $M(s,t)$ et chacun des points $X(0,4)$, $Y(3,0)$ et $Z(3,4)$.

$$\begin{aligned} (s-0)^2 + (t-4)^2 &= (r-4)^2 \\ (s-3)^2 + (t-0)^2 &= (r-3)^2 \\ (s-3)^2 + (t-4)^2 &= (r-5)^2 \end{aligned}$$

On soustrait la troisième équation de la première pour obtenir $s^2-(s-3)^2 = (r-4)^2-(r-5)^2$, ou $s^2 - s^2 + 6s - 9 = r^2 - 8r + 16 - r^2 + 10r - 25$, d'où $6s - 9 = 2r - 9$, ou $r = 3s$.
On soustrait la troisième équation de la deuxième pour obtenir $t^2-(t-4)^2 = (r-3)^2-(r-5)^2$, ou $t^2 - t^2 + 8t - 16 = r^2 - 6r + 9 - r^2 + 10r - 25$, d'où $8t - 16 = 4r - 16$, ou $r = 2t$.
On reporte $s = \frac{1}{3}r$ et $t = \frac{1}{2}r$ dans la première équation pour obtenir les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{1}{3}r\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}r - 4\right)^2 &= (r-4)^2 \\ \tfrac{1}{9}r^2 + \tfrac{1}{4}r^2 - 4r + 16 &= r^2 - 8r + 16 \\ \tfrac{1}{9}r^2 + \tfrac{1}{4}r^2 + 4r &= r^2 \\ 4r^2 + 9r^2 + 144r &= 36r^2 \qquad \text{(on a multiplié chaque membre par 36)} \\ 144r &= 23r^2 \\ 0 &= r(23r - 144) \end{aligned}$$

Donc $r = 0$ (ce qui est impossible) ou $r = \frac{144}{23}$.
Le grand cercle a un rayon de longueur $\frac{144}{23}$.

Réponse : $\frac{144}{23}$

Partie B

1. (a) On factorise le membre de gauche de l'équation $x^2+2x-8=0$. On obtient $(x+4)(x-2)=0$. Les racines de l'équation $x^2+2x-8=0$ sont $x=-4$ et $x=2$.

(b) Puisque la parabole d'équation $y=x^2+bx+c$ passe aux points $(1,2)$ et $(2,0)$, les coordonnées de ces points vérifient l'équation de la parabole.
Donc, $2=1^2+b\cdot 1+c$ (ce qui donne $b+c=1$) et $0=2^2+2b+c$ (ce qui donne $2b+c=-4$).
On soustrait la première équation simplifiée de la deuxième.
On obtient $(2b+c)-(b+c)=-4-1$, ou $b=-5$.
On reporte $b=-5$ dans l'équation $b+c=1$ pour obtenir $c=1-b$, d'où $c=1-(-5)$, ou $c=6$.
Donc $b=-5$ et $c=6$.
(On peut vérifier que les coordonnées $(1,2)$ et $(2,0)$ des points vérifient l'équation $y=x^2-5x+6$.)

(c) Puisque le point $(0,2)$ est situé sur la parabole d'équation $y=a(x-1)^2+\frac{8}{3}$, ses coordonnées vérifient l'équation. Donc $2=a(-1)^2+\frac{8}{3}$, d'où $2=a+\frac{8}{3}$. Donc $a=2-\frac{8}{3}$, ou $a=-\frac{2}{3}$.
La parabole a donc pour équation $y=-\frac{2}{3}(x-1)^2+\frac{8}{3}$.
On cherche la valeur de d $(d>0)$ pour laquelle le point $(d,0)$ est situé sur la parabole.
Le point est sur la parabole si ses coordonnées vérifient l'équation. On obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= -\tfrac{2}{3}(d-1)^2+\tfrac{8}{3} \\ \tfrac{2}{3}(d-1)^2 &= \tfrac{8}{3} \\ (d-1)^2 &= 4 \\ d-1 &= \pm 2 \end{aligned}$$

Donc $d=-2+1$ ou $d=2+1$, c'est-à-dire que $d=-1$ ou $d=3$.
Puisque $d>0$, on a $d=3$.

2. (a) Le tableau indique comment Jos peut gagner en trois tours :

R	R	R	R	R	R	Départ
V	V	V	V	R	R	Après 1 tour
V	R	R	R	V	R	Après 2 tours
V	V	V	V	V	V	Après 3 tours

À son premier tour, il retourne les quatre premières cartes.
À son deuxième tour, il retourne les cartes 2 à 5.
À son troisième tour, il retourne les quatre cartes rouges.

(b) Jos peut utiliser plus d'une séquence de tours pour gagner.
Par exemple, Jos peut réussir en 9 tours. Au 1er tour, il retourne les cartes 1, 2, 3, 4, 5. Au 2e tour, il retourne les cartes 2, 3, 4, 5, 6.
Il continue de cette manière en retournant cinq cartes consécutives en commençant par la carte t au $t^{\text{ième}}$ tour, tout en considérant que la carte 1 vient après la carte 9. Par exemple, au 7e tour, Jos retourne les cartes 7, 8, 9, 1, 2.
De cette manière, chacune des 9 cartes est retournée 5 fois (une fois dans chacune des cinq positions des cinq cartes retournées).
Puisque chaque carte est retournée un nombre impair de fois, la couleur ultime est l'opposée de la couleur initiale. Elle est donc verte.
Le tableau illustre cette stratégie :

R	R	R	R	R	R	R	R	R	Départ
V	V	V	V	V	R	R	R	R	Après 1 tour
V	R	R	R	R	V	R	R	R	Après 2 tours
V	R	V	V	V	R	V	R	R	Après 3 tours
V	R	V	R	R	V	R	V	R	Après 4 tours
V	R	V	R	V	R	V	R	V	Après 5 tours
R	R	V	R	V	V	R	V	R	Après 6 tours
V	V	V	R	V	V	V	R	V	Après 7 tours
R	R	R	R	V	V	V	V	R	Après 8 tours
V	V	V	V	V	V	V	V	V	Après 9 tours

Jos peut aussi gagner en trois tours :

R	R	R	R	R	R	R	R	R	Départ
V	V	V	V	V	R	R	R	R	Après 1 tour
V	V	R	R	R	V	V	R	R	Après 2 tours
V	V	V	V	V	V	V	V	V	Après 3 tours

(c) Supposons que $n = 2017$. Jos a donc 2017 cartes.
On montrera que Jos peut gagner lorsque k est impair et qu'il ne peut pas gagner lorsque k est pair.

Supposons que k est impair.
Par exemple, Jos utilisera 2017 tours.
Pour chacune des valeurs de t ($t = 1, 2, 3, \ldots, 2016, 2017$), Jos retourne les k cartes consécutives à partir de la $t^{\text{ième}}$ carte, tout en considérant que la carte 1 vient après la carte 2017.
De cette manière, chacune des 2017 cartes est retournée k fois (une fois dans chacune des k positions des k cartes retournées).
Puisque k est impair, la couleur ultime de chacune des 2017 cartes est l'opposée de la couleur initiale. Elle est donc verte.
Jos peut donc gagner lorsque k est impair.

Supposons que k est pair.
Pour que Jos gagne, chacune des 2017 cartes doit être retournée un nombre impair de fois de manière à changer sa couleur initiale.
Le nombre total de retournements est donc un nombre impair, puisqu'il est la somme de 2017 entiers impairs (le nombre de retournements des 2017 cartes).
Pour n'importe quel entier strictement positif t, après t tours, Jos aura retourné tk cartes (k retournements après t tours).
Puisque k est pair, alors tk est pair.
Donc après n'importe quel nombre de tours, le nombre total de cartes retournées est toujours pair, ce qui indique qu'on ne peut jamais finir un tour avec le nombre impair de retournements nécessaires pour changer la couleur initiale de chaque carte.
Donc lorsque k est pair, Jos ne peut pas gagner.

Pour conclure, lorsque $n = 2017$, Jos peut gagner pour toute valeur impaire de k ($1 \leq k < 2017$) et il ne peut pas gagner pour toute valeur paire de k ($1 \leq k < 2017$).

3. (a) On reporte tour à tour les valeurs de $f(n)$ dans l'équation $f(f(n)) = f(n)+3n$ pour obtenir des valeurs de $f(f(n))$:

$$\begin{aligned} n=2: \quad && f(f(2)) &= f(2)+3\cdot 2 \\ && f(5) &= 5+6=11 \\[1em] n=5: \quad && f(f(5)) &= f(5)+3\cdot 5 \\ && f(11) &= 11+15=26 \\[1em] n=11: \quad && f(f(11)) &= f(11)+3\cdot 11 \\ && f(26) &= 26+33=59 \end{aligned}$$

Donc $f(26) = 59$.

(b) On démontrera qu'il n'existe aucune telle fonction g en utilisant la définition pour obtenir deux sorties différentes pour la même entrée, ce qui contredira une propriété essentielle d'une fonction, soit que toute entrée est associée à exactement une sortie.
À chaque étape, on utilise des valeurs de m et de n pour lesquelles on connait déjà les valeurs de $g(m)$ et de $g(n)$, ce qui limitera le nombre d'options à chaque étape.

On suppose qu'il existe une fonction g telle que $g(1) = 2$ et $g(g(n) + m) = n + g(m)$.

- Lorsque $n = 1$ et $m = 1$, alors $g(g(1) + 1) = 1 + g(1)$, d'où $g(2 + 1) = 1 + 2$.
Donc $g(3) = 3$.
- Lorsque $n = 1$ et $m = 3$, alors $g(g(1) + 3) = 1 + g(3)$, d'où $g(2 + 3) = 1 + 3$.
Donc $g(5) = 4$.
- Lorsque $n = 3$ et $m = 1$, alors $g(g(3) + 1) = 3 + g(1)$, d'où $g(3 + 1) = 3 + 2$.
Donc $g(4) = 5$.
- Lorsque $n = 3$ et $m = 2$, alors $g(g(3) + 2) = 3 + g(2)$, d'où $g(3 + 2) = 3 + g(2)$.
Puisque $g(5) = 4$, alors $4 = 3 + g(2)$, d'où $g(2) = 1$.
- Lorsque $n = 2$ et $m = 4$, alors $g(g(2) + 4) = 2 + g(4)$, d'où $g(1 + 4) = 2 + 5$.
Donc $g(5) = 7$.

Puisque $g(5) = 4$ et $g(5) = 7$, on a une contradiction.
Il n'existe donc aucune telle fonction g.

(c) *Solution 1*
On démontrera d'abord que la fonction h définie par $h(n) = n + 1$, n étant n'importe quel entier strictement positif, vérifie les trois conditions.
Il est clair que h vérifie les deux premières conditions.
Puisque $h(n) = n + 1$, n étant n'importe quel entier strictement positif, alors :

$$h(h(n) + m) = h(n + 1 + m) = (n + 1 + m) + 1 = n + m + 2$$

et

$$1 + n + h(m) = 1 + n + m + 1 = n + m + 2$$

La troisième condition est donc vérifiée.

On démontrera ensuite par contradiction qu'il n'existe aucune autre fonction qui vérifie les trois conditions. Supposons que la fonction h vérifie les trois conditions et que $h(1) = k$.

<u>1[re] étape : On démontre que $h(a + rk) = h(a) + 2r$ pour tous les entiers r ($r \geq 1$)</u>

On reporte $n = 1$ et $m = a$ dans l'équation qui définit h.
On obtient $h(h(1) + a) = 1 + 1 + h(a)$, d'où $h(a + k) = h(a) + 2$.
On reporte $n = 1$ et $m = a + k$ dans la même équation. On obtient

$$h(h(1) + a + k) = 1 + 1 + h(a + k)$$

ou $h(a + 2k) = 2 + h(a) + 2$, ou $h(a + 2k) = h(a) + 4$.
On reporte $n = 1$ et $m = a + 2k$ dans la même équation. On obtient

$$h(h(1) + a + 2k) = 1 + 1 + h(a + 2k)$$

ou $h(a + 3k) = 2 + h(a) + 4$, ou $h(a + 3k) = h(a) + 6$.
Supposons que $h(a + (r - 1)k) = h(a) + 2(r - 1)$ pour un entier r quelconque ($r \geq 2$).
On reporte $n = 1$ et $m = a + (r - 1)k$ dans la même équation. On obtient

$$h(h(1) + a + (r - 1)k) = 1 + 1 + h(a + (r - 1)k)$$

ou $h(a + rk) = 2 + h(a) + 2(r - 1)$, ou $h(a + rk) = h(a) + 2r$.

<u>2[e] étape : On démontre que si $h(b) = h(c)$, alors $b = c$</u>

En d'autres mots, on démontre que la fonction h est biunivoque.
Supposons que $h(b) = h(c)$.
Alors pour chaque entier strictement positif d, on a $h(h(b) + d) = 1 + b + h(d)$ et $h(h(c) + d) = 1 + c + h(d)$.
Puisque $h(b) = h(c)$, alors $h(h(b) + d) = h(h(c) + d)$. Donc $1 + b + h(d) = 1 + c + h(d)$, d'où $b = c$.

<u>3[e] étape : On démontre que $k \leq 2$</u>

D'après la 1[re] étape, $h(a+rk) = h(a)+2r$ pour tous les entiers strictement positifs a et r.
Supposons que $k \geq 3$.
Lorsque $a = 1$, on a $h(1 + rk) = h(1) + 2r$ pour tous les entiers strictement positifs r.
Dans ce cas, les valeurs de h forment un ensemble infini d'entiers positifs, commençant par $h(1) + 2$ et chacun étant 2 de plus que le précédent.
Lorsque $a = 2$, on a $h(2 + rk) = h(2) + 2r$ pour tous les entiers strictement positifs r.
Dans ce cas, les valeurs de h forment un ensemble infini d'entiers positifs, commençant par $h(2) + 2$ et chacun étant 2 de plus que le précédent.
Lorsque $a = 3$, on a $h(3 + rk) = h(3) + 2r$ pour tous les entiers strictement positifs r.
Dans ce cas, les valeurs de h forment un ensemble infini d'entiers positifs, commençant par $h(3) + 2$ et chacun étant 2 de plus que le précédent.
Puisque $k \geq 3$, les éléments de ces trois ensembles sont tous distincts, puisque ceux du premier ensemble donnent un reste de 1 lorsqu'on les divise par k, ceux du deuxième ensemble donnent un reste de 2 lorsqu'on les divise par k et ceux du troisième ensemble donnent un reste de 3 (possiblement 0 si $k = 3$) lorsqu'on les divise par k.
Or, les trois ensembles de sorties $h(1) + 2r$, $h(2) + 2r$ et $h(3) + 2r$ doivent chevaucher, puisqu'il ne peut y avoir que deux ensembles infinis disjoints dont les éléments diffèrent de 2.
On a donc une contradiction, ce qui implique qu'on ne peut avoir $k \geq 3$. Donc $k \leq 2$.

4^e étape : On démontre que $k = 2$

On sait que $k = 1$ ou $k = 2$.
Si $h(1) = k = 1$, l'équation $h(1 + rk) = h(1) + 2r$ devient $h(1 + r) = 1 + 2r$.
On reporte $n = 1 + r$ (ou $r = n - 1$) dans cette équation pour obtenir $h(n) = 1 + 2(n - 1)$, d'où $h(n) = 2n - 1$.
Dans ce cas, le membre de gauche de l'équation $h(h(n) + m) = 1 + n + h(m)$ devient

$$h(h(n) + m) = h(2n - 1 + m) = 2(2n - 1 + m) - 1 = 4n + 2m - 3$$

et le membre de droite de l'équation devient :

$$1 + n + h(m) = 1 + n + 2m - 1 = n + 2m$$

Ces deux expressions ne sont pas toujours égales pour toutes les valeurs de n et de m (par exemple, lorsque $n = m = 2$).
On ne peut donc pas avoir $k = 1$. Donc $k = 2$.

5^e étape : On démontre que $h(n) = n + 1$ lorsque n est impair

D'après $h(1+rk) = h(1)+2r$ et $k = 2$, on a $h(1+2r) = 2+2r$, ou $h(1+2r) = (2r+1)+1$.
Donc $h(n) = n + 1$ lorsque n est impair.

6^e étape : On démontre que $h(n) = n + 1$ lorsque n est pair

D'après $h(2 + rk) = h(2) + 2r$, on a $h(2 + 2r) = h(2) + 2r$.
Si on peut démontrer que $h(2) = 3$, on aura $h(2 + 2r) = 3 + 2r$, tel que requis.
Puisque $h(x)$ est pair lorsque x est impair et puisque h est biunivoque, $h(x)$ doit être impair lorsque x est pair.
En particulier, $h(2)$ est impair.
D'après $h(h(n)+m) = 1+n+h(m)$ lorsque $n = 2$ et $m = 1$, on a $h(h(2)+1) = 1+2+h(1)$.
Donc $h(h(2) + 1) = 5$.
Lorsque n est impair, les valeurs de $h(n)$ forment une suite croissante d'entiers impairs positifs.
En effet, $h(2)$ est impair et l'expression $h(2) + 2r$ est impaire et croissante lorsque r est croissante. Donc, $h(2 + 2r) = h(2) + 2r$ est impaire et croissante lorsque r est croissante.
Donc, $h(h(2) + 1) = 5$ doit être la troisième plus petite valeur, la deuxième plus petite valeur ou la plus petite valeur de $h(n)$ lorsque n est pair.
Puisque $h(2 + 2r) = h(2) + 2r$, alors les valeurs de $h(x)$ augmentent lorsque x est paire et que ses valeurs augmentent par 2.
On doit donc avoir $h(6) = 5$ ou $h(4) = 5$ ou $h(2) = 5$.
Si $h(6) = 5$, alors $h(h(2) + 1) = 5$ donne $h(2) + 1 = 6$, ou $h(2) = 5$, ce qui est impossible puisque h est biunivoque.
Si $h(2) = 5$, alors $h(h(2) + 1) = 5$ donne $h(2) + 1 = h(2)$, ce qui est impossible.
Donc $h(4) = 5$, d'où $h(2 + 2) = h(2) + 2$. Donc $h(2) = 5 - 2$, ou $h(2) = 3$.

On a démontré que la fonction définie par $h(n) = n + 1$ vérifie la deuxième condition et qu'aucune autre fonction de la vérifie, ce qu'il fallait démontrer.

Solution 2
Soit h une fonction qui satisfait aux trois propriétés données. On considère l'ensemble infini de points de treillis $(m, h(m))$, où $m = 1, 2, 3, \ldots$
Soit a un entier strictement positif.
Lorsque $n = a$ et $m = h(a)$, la fonction est définie par l'équation
$h(h(a) + h(a)) = 1 + a + h(h(a))$, ou $h(2h(a)) = 1 + a + h(h(a))$.

Donc, le point $(2h(a), 1+a+h(h(a)))$ est situé sur la représentation graphique de $y = h(x)$.
Lorsque $n = a$ et $m = 2h(a)$, l'équation devient

$$h(h(a) + 2h(a)) = 1 + a + h(2h(a))$$

ou $h(3h(a)) = 1 + a + 1 + a + h(h(a))$, ou $h(3h(a)) = 2 + 2a + h(h(a))$.
Donc, le point $(3h(a), 2+2a+h(h(a)))$ est situé sur la représentation graphique de $y = h(x)$.
Soit r un entier strictement positif tel que $h(rh(a)) = (r-1) + (r-1)a + h(h(a))$.
Lorsque $n = a$ et $m = rh(a)$, l'équation qui définit la fonction h est :

$$h(h(a)+rh(a)) = 1+a+h(rh(a)) = 1+a+(r-1)+(r-1)a+h(h(a)) = r+ra+h(h(a))$$

ou $h((r+1)h(a)) = r + ra + h(h(a))$.
Donc si le point $(rh(a), (r-1)+(r-1)a+h(h(a)))$ est situé sur la représentation graphique de $y = h(x)$, alors le point $((r+1)h(a), r + ra + h(h(a)))$ l'est aussi.
Ceci démontre que l'ensemble infini de points ayant des coordonnées de la forme $(sh(a), (s-1) + (s-1)a + h(h(a)))$, s étant des entiers tels que $s \geq 2$, sont tous situés sur la représentation graphique.
On remarque que pour passer d'un point au point suivant dans cet ensemble, on compte $h(a)$ unités vers la droite et $a + 1$ unités vers le haut.
En d'autres mots, l'ensemble de ces points est situé sur une droite de pente $\dfrac{a+1}{h(a)}$.
Soit D_a cette droite.
Soit b un entier strictement positif tel que $b \neq a$.
D'après un argument semblable, les points $(th(b), (t-1) + (t-1)b + h(h(b)))$, t étant un entier tel que $t \geq 2$, sont situés sur la représentation graphique de h et ils sont situés sur une droite D_b de pente $\dfrac{b+1}{h(b)}$.
On considère les points $(n, h(n))$ sur la représentation graphique de $y = h(x)$, n étant un entier strictement positif et à la fois un multiple de $h(a)$ et un multiple de $h(b)$.
Il existe un nombre infini de tels points (par exemple, $n = wh(a)h(b)$, où w sont des entiers strictement positifs).
Ces points sont situés sur D_a et sur D_b. Les pentes des deux droites doivent donc être égales.
Or, cela est vrai pour chaque paire d'entiers distincts strictement positifs a et b.
Donc, l'expression $\dfrac{a+1}{h(a)}$ doit être constante pour tous les entiers strictement positifs a.
(On peut aussi le voir en posant $a = 1$ et en faisant varier b sur l'ensemble des entiers supérieurs à 1.)
En d'autres mots, $\dfrac{a+1}{h(a)} = \dfrac{1}{c}$, c étant une constante quelconque, c'est-à-dire que $h(a) = ca + c$ pour tous entiers strictement positifs a.
Lorsque $a = 1$, alors $h(1) = c + c$, ou $h(1) = 2c$.
On pose $n = m = 1$ dans l'équation $h(h(n) + m) = 1 + n + h(m)$ pour obtenir $h(h(1) + 1) = 1 + 1 + h(1)$, ce qui donne $h(2c + 1) = 2 + 2c$.
Puisque $h(a) = ca + c$, alors en posant $a = 2c + 1$, on obtient $c(2c + 1) + c = 2 + 2c$, ou $2c^2 + 2c = 2 + 2c$, d'où $c^2 = 1$.
Puisque $c > 0$, alors $c = 1$. Donc $h(n) = n + 1$.
(La solution 1 montre que la fonction h, définie par $h(n) = n + 1$, satisfait bien aux conditions données.)