Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2018

le jeudi 12 avril 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2018
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Lundi, Sacha a acheté 4 boites de cerises qu'il a payées 2,00 $ $\times$ 4, ou 8,00 $.
Il a aussi acheté 3 boites de prunes qu'il a payées 3,00 $ $\times$ 3, ou 9,00 $ et 2 boites de bleuets qu'il a payées 4,50 $ $\times$ 2, ou 9,00 $.
En tout, Sacha a dépensé 8,00 $ + 9,00 $ + 9,00 $, ou 26,00 $.

(b) Mercredi, Sacha a acheté 2 boites de prunes qu'il a payées 3,00 $ $\times$ 2, ou 6,00 $.
Puisqu'il a dépensé 22,00 $ en tout, il a dépensé 16,00 $ (22,00 $ − 6,00 $ = 16,00 $) pour des boites de cerises.
Puisque chaque boite de cerises coute 2,00 $, Sacha a acheté 8 boites de cerises (16,00 $ ÷ 2,00 $ = 8).

(c) *Solution 1*
Samedi, Sacha a rendu 100,00 $ à la caissière qui lui a remis 14,50 $. Il a donc dépensé 85,50 $ (100,00 $ − 14,50 $ = 85,50 $).
Il a acheté 3 boites de bleuets qui ont couté 13,50 $ (4,50 $ $\times$ 3 = 13,50 $).
Il a donc dépensé 72,00 $ (85,50 $ − 13,50 $ = 72,00 $) pour des prunes et des cerises.
Si Sacha a acheté c boites de cerises, alors il a aussi acheté $2c$ boites de prunes (2 fois plus).
Les c boites de cerises ont couté 2,00 $ $\times\, c$, ou $2c$ $.
Les $2c$ boites de prunes ont couté 3,00 $ $\times\, 2c$, ou $6c$ $.
Sacha a dépensé $8c$ $ pour les cerises et les prunes ($2c$ $ + $6c$ $ = $8c$ $). Donc $8c = 72$, ou $c = 9$.
Sacha a acheté 9 boites de cerises.

Solution 2
Comme dans la solution 1, on détermine d'abord que Sacha a dépensé 72,00 $ pour des prunes et des cerises.
Pour chaque boite de cerises qu'il a achetée, il a acheté 2 boites de prunes.
Une boite de cerises et deux boites de prunes coutent 8 $ (2,00 $ + 2 $\times$ 3,00 $ = 8,00 $).
Puisque 72,00 $ ÷ 8,00 $ = 9, Sacha a acheté 9 boites de cerises (et 18 boites de prunes).

Remarque : Dans chacune des solutions, on peut vérifier que 9 boites de cerises, 18 boites de prunes et 3 boites de bleuets coutent 9 $\times$ 2,00 $ + 18 $\times$ 3,00 $ + 3 $\times$ 4,50 $, ou 85,50 $ et que la somme de 14,50 $ de monnaie rendue est correcte.

2. (a) Dans la première figure (chemin parcouru par Paul), le triangle ABM est rectangle en B.
D'après le théorème de Pythagore, $MA^2 = AB^2 + BM^2$. Soit $MA = x$ m.
Donc $x^2 = 105^2 + 100^2$, ou $x^2 = 21\,025$. Donc $x = \sqrt{21\,025}$, ou $x = 145$ (puisque $x > 0$).
Donc $MA = 145$ m.

(b) Dans la deuxième figure (chemin parcouru par Théo), $AD = BC = 200$ m et $DC = AB = 105$ m (puisque $ABCD$ est un rectangle).
Donc $PD = AD - AP$, ou $PD = 200$ m − 140 m, ou $PD = 60$ m.
De même, $DQ = DC - QC$, ou $DQ = 105$ m − 60 m, ou $DQ = 45$ m.
Le triangle PDQ est rectangle en D. Soit $PQ = y$ m. D'après le théorème de Pythagore, $PQ^2 = PD^2 + DQ^2$. Donc $y^2 = 60^2 + 45^2$, ou $y^2 = 5625$. Donc $y = 75$ (puisque $y > 0$).
Donc $PQ = 75$ m.
La distance totale parcourue par Théo est égale à :

$$AP + PQ + QC + CB + BA = 140 \text{ m} + 75 \text{ m} + 60 \text{ m} + 200 \text{ m} + 105 \text{ m} = 580 \text{ m}$$

(c) La distance totale parcourue par Paul est égale à :

$$AD + DC + CM + MA = 200 \text{ m} + 105 \text{ m} + (200 \text{ m} - 100 \text{ m}) + 145 \text{ m} = 550 \text{ m}.$$

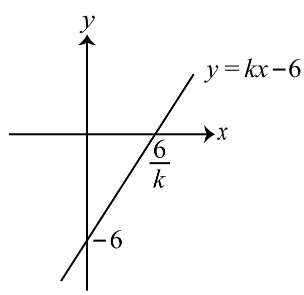
Théo court à une vitesse de 145 m/min. Il met donc 4 minutes ($580 \div 145 = 4$) pour terminer son trajet.
Paul commence en même temps que Théo et termine 1 minute après Théo. Il met donc 5 minutes ($4 + 1 = 5$) pour terminer son trajet.
Pendant ce temps, Paul parcourt 550 m. Il a donc une vitesse de 110 m/min ($550 \div 5 = 110$).

3. (a) On détermine l'abscisse à l'origine en posant $y = 0$ dans l'équation $y = 2x - 6$.
On obtient donc $0 = 2x - 6$, d'où $2x = 6$, ou $x = 3$.
L'abscisse à l'origine de la droite d'équation $y = 2x - 6$ est 3.

On détermine l'ordonnée à l'origine en posant $x = 0$ dans l'équation $y = 2x - 6$.
On obtient donc $y = 2(0) - 6$, d'où $y = -6$.
L'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $y = 2x - 6$ est -6.

(b) Posons $y = 0$ dans l'équation de la droite. On obtient $0 = kx - 6$, ou $kx = 6$, ou $x = \frac{6}{k}$, ($k \neq 0$).
La droite a pour abscisse à l'origine $\frac{6}{k}$ ($k \neq 0$).

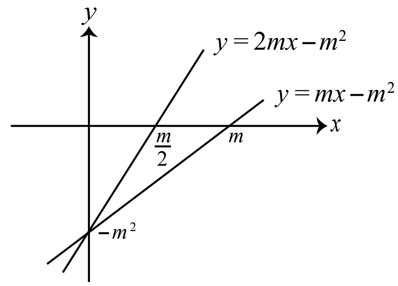
(c) D'après la partie (b), la droite d'équation $y = kx - 6$ a pour abscisse à l'origine $\frac{6}{k}$.
Puisque $k > 0$, alors $\frac{6}{k} > 0$ et la droite coupe donc l'axe des abscisses à la droite de l'origine.
La droite d'équation $y = kx - 6$ a pour ordonnée à l'origine -6.



Le triangle est formé par la droite, la partie positive de l'axe des abscisses et la partie négative de l'axe des ordonnées. Il a une base de longueur $\frac{6}{k}$ et une hauteur de 6 (puisque l'ordonnée à l'origine est égale à -6). Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{6}{k}\right)(6)$, ou $\frac{36}{2k}$, ou $\frac{18}{k}$.
Puisque le triangle a une aire de 6, alors $\frac{18}{k} = 6$, d'où $18 = 6k$, ou $k = 3$.

(d) On obtient l'abscisse à l'origine de la droite d'équation $y = 2mx - m^2$ en posant $y = 0$.
On obtient $0 = 2mx - m^2$, ou $0 = m(2x - m)$. Puisque $m > 0$, alors $2x = m$, ou $x = \frac{m}{2}$.
Cette droite a donc pour abscisse à l'origine $\frac{m}{2}$ ($m > 0$).
On obtient l'ordonnée à l'origine de cette droite en posant $x = 0$.
On obtient $y = 2m(0) - m^2$, ou $y = -m^2$.
Cette droite a donc pour ordonnée à l'origine $-m^2$.
De même, on obtient l'abscisse à l'origine de la droite d'équation $y = mx - m^2$ en posant $y = 0$. On obtient $0 = mx - m^2$, ou $0 = m(x - m)$. Puisque $m > 0$, alors $x = m$.
Cette droite a donc pour abscisse à l'origine m ($m > 0$).
On obtient l'ordonnée à l'origine de cette droite en posant $x = 0$. On obtient $y = m(0) - m^2$,

ou $y = -m^2$. Cette droite a donc pour ordonnée à l'origine $-m^2$.
Les deux droites ont donc la même ordonnée à l'origine.



On considère la partie entre les deux droites sur l'axe des abscisses comme la base du triangle. Sa longueur est égale à la différence des abscisses à l'origine. Elle est égale à $m - \frac{m}{2}$, ou $\frac{m}{2}$.
La hauteur est la partie de l'axe des ordonnées entre l'origine et le point d'intersection des droites avec cet axe. Puisque les droites ont une ordonnée à l'origine de $-m^2$, la hauteur du triangle est égale à m^2.
L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)(m^2)$, ou $\frac{m^3}{4}$.
Puisque cette aire est égale à $\frac{54}{125}$, on a $\frac{m^3}{4} = \frac{54}{125}$, ou $m^3 = \frac{216}{125}$, ou $m = \sqrt[3]{\frac{216}{125}}$, ou $m = \frac{6}{5}$. (On peut vérifier que $\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125}$.)
La seule valeur de m pour laquelle le triangle a une aire de $\frac{54}{125}$ est $m = \frac{6}{5}$.

4. (a) Chacun des trois chiffres peut être un 1 ou un 2. Pour chacun des 2 choix pour le premier chiffre, il y a 2 choix pour le deuxième chiffre. Pour chacun de ces 2×2 choix, il y a 2 choix pour le troisième chiffre. Il y a donc 8 nombres Bauman de trois chiffres ($2^3 = 8$).
Ces nombres sont : 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222.

(b) Un nombre de Bauman de moins de trois tranches doit avoir une tranche ou deux tranches.

On considère d'abord les nombres de Bauman de 10 chiffres composés d'une seule tranche.
Un tel nombre doit être composé de 10 chiffres 1 ou de 10 chiffres 2.
Il y a donc 2 nombres de Bauman composés d'une tranche.

On considère ensuite les nombres de Bauman de 10 chiffres composés d'exactement deux tranches.
Un tel nombre doit avoir une tranche de chiffres 1 suivie d'une tranche de chiffres 2 ou bien une tranche de chiffres 2 suivie d'une tranche de chiffres 1.
Supposons que la tranche de chiffres 1 précède la tranche de chiffres 2.
La tranche de chiffres 1 peut contenir 1 chiffre, 2 chiffres, et ainsi de suite jusqu'à 9 chiffres (cette tranche a une longueur maximale de 9 chiffres, puisqu'elle doit être suivie d'une tranche de chiffres 2).
Dans chaque cas, les chiffres qui suivent sont des 2. Il y a donc 9 nombres de Bauman de cette sorte.
De même, il y a 9 nombres Bauman de 10 chiffres composés d'une tranche de chiffres 2 (de 1 à 9 chiffres 2) suivie d'une tranche de chiffres 1.

En tout, il y a 20 nombres de Bauman ($2 + 9 + 9 = 20$) de 10 chiffres composés de moins de trois tranches.

(c) On considère d'abord les nombres de Bauman composés d'une seule tranche.
Si la tranche est composée de chiffres 2, la somme de ses chiffres est paire. Il n'existe donc aucun nombre de Bauman composé d'exactement une tranche de chiffres 2 dont la somme des chiffres est égale à 7.
Il y a 1 nombre de Bauman composé d'une tranche de sept chiffres 1 dont la somme des chiffres est égale à 7.

On considère ensuite les nombres de Bauman composés d'exactement deux tranches.
Un tel nombre doit avoir au moins un chiffre 2 (puisqu'il y a deux tranches), et au plus trois chiffres 2, puisque la somme des chiffres est égale à 7.
Si le nombre de Bauman a une tranche d'un seul chiffre 2, il doit alors avoir une tranche de cinq chiffres 1.
Il existe exactement deux nombres de ce type, soit 211 111 et 111 112.
Si le nombre de Bauman a une tranche d'exactement deux chiffres 2, il doit avoir une tranche de trois chiffres 1.
Il existe exactement deux nombres de ce type, soit 22 111 et 11 122.
Si le nombre de Bauman a une tranche d'exactement trois chiffres 2, il doit avoir une tranche de un chiffre 1.
Il existe exactement deux nombres de ce type, soit 2221 et 1222.
Il existe donc 6 nombres de Bauman composés d'exactement deux tranches et dont les chiffres ont une somme de 7.

On considère enfin les nombres de Bauman composés d'exactement trois tranches.
Comme ci-haut, ils doivent avoir au moins un chiffre 2 et au plus trois chiffres 2.
Les nombres Bauman de ce type doivent être composés de :

(i) une tranche de un chiffre 2 et deux tranches de chiffres 1 (cinq 1 en tout), ou

(ii) une tranche de deux chiffres 2 et deux tranches de chiffres 1 (trois 1 en tout), ou

(iii) une tranche de un chiffre 1 et deux tranches de chiffres 2 (trois 2 en tout), ou

(iv) une tranche de trois chiffres 1 et deux tranches de chiffres 2 (deux 2 en tout)

On remarque qu'il est impossible pour des nombres de Bauman de ce type d'être composés de :

- une tranche de trois chiffres 2 ou plus et deux tranches de chiffres 1, puisque la somme des chiffres serait supérieure à 7 ;
- une tranche de deux chiffres 1 et deux tranches de chiffres 2 puisque la somme des chiffres serait paire ;
- une tranche de quatre chiffres 1 ou plus et deux tranches de chiffres 2, puisque la somme des chiffres serait supérieure à 7.

Dans le tableau suivant, on indique les nombres de Bauman qui sont composés d'exactement trois tranches et dont les chiffres ont une somme de 7.
Chaque rangée correspond à un des quatre cas énumérés ci-haut.

Cas	Nombres de Bauman
(i)	121 111, 112 111, 111 211, 111 121
(ii)	12 211, 11 221
(iii)	2122, 2212
(iv)	21 112

Il existe 9 nombres de Bauman composés d'exactement trois tranches et dont les chiffres ont une somme de 7.

Il existe 16 nombres de Bauman ($1+6+9=16$) composés d'au plus trois tranches et dont la somme des chiffres est égale à 7.

(d) On utilisera la notation $\boxed{2}$ pour représenter une tranche d'exactement 2018 chiffres 2. De plus, X_n représentera une suite de n chiffres contenant des 1, des 2 ou des 1 et des 2.
On cherche combien il existe de nombres de Bauman de 4037 chiffres qui ont au moins une $\boxed{2}$.
On considère trois cas :

(i) Le nombre de Bauman commence par une $\boxed{2}$. Les 2018 premiers chiffres sont donc des 2 et le 2019e chiffre est un 1. On remarque le 2019e chiffre doit être un 1, autrement la première tranche aurait au moins 2019 chiffres 2 et le nombre ne commencerait pas par une $\boxed{2}$.

(ii) Le nombre de Bauman se termine par une $\boxed{2}$. Ainsi les 2018 chiffres sont des 2 et le chiffre qui les précède (encore le 2019e chiffre du nombre) est un 1.
On remarque que (i) et (ii) peuvent se produire en même temps.

(iii) Le nombre de Bauman contient une $\boxed{2}$, mais cette $\boxed{2}$ ne se produit pas au début du nombre, ni à la fin du nombre. Dans ce cas, le nombre de Bauman contient les 2020 chiffres $1\boxed{2}1$ dans cet ordre.

On remarque que tout nombre de Bauman qui contient au moins une $\boxed{2}$ est conforme à au moins un des cas précédents.
On compte ensuite combien il existe de nombres de Bauman de 4037 chiffres dans chacun de ces trois cas.

Cas (i)

Les 2019 premiers chiffres du nombre sont $\boxed{2}1$. Il reste donc $(4037-2019)$ chiffres, ou 2018 chiffres, chacun pouvant être un 1 ou un 2.
Dans ce cas, les nombres de Bauman sont de la forme $\boxed{2}1X_{2018}$.
Il y a 2 choix pour chacun des 2018 derniers chiffres (soit un 1 ou un 2). Il y a donc 2^{2018} nombres de Bauman de cette forme.

Cas (ii)

De même, les 2019 derniers chiffres du nombre sont $1\boxed{2}$ et il reste 2018 chiffres $(4037-2019=2018)$, chacun pouvant être un 1 ou un 2.
Dans ce cas, les nombres de Bauman sont de la forme $X_{2018}1\boxed{2}$.
Il y a 2 choix pour chacun des 2018 autres chiffres (soit un 1 ou un 2). Il y a donc 2^{2018} nombres de Bauman de cette forme.
Comme il a été mentionné précédemment, il y a exactement 1 nombre qui satisfait aux conditions du cas (i) et du cas (ii).
Le nombre de Bauman $\boxed{2}1\boxed{2}$ a 4037 chiffres et il commence et se termine par $\boxed{2}$.
On a donc compté ce nombre deux fois, une fois dans le cas (i) et une autre fois dans le cas (ii).
Donc, le nombre de nombres de Bauman de 4037 chiffres qui satisfont aux conditions du cas (i) ou du cas (ii) est égal à $2^{2018}+2^{2018}-1$.

Cas (iii)

On remarque que chaque nombre de Bauman qui satisfait aux conditions du cas (iii) doit être différent de tout nombre de Bauman qui satisfait aux conditions du cas (i) ou du cas (ii).
On suppose d'abord que les 2020 premiers chiffres du nombre de Bauman sont $1\boxed{2}1$.
Dans ce cas, il reste 2017 chiffres $(4037-2020=2017)$, chacun pouvant être un 1 ou un 2.

Ces nombres de Bauman sont de la forme $1\boxed{2}1X_{2017}$.
Puisqu'il ne reste que 2017 chiffres à choisir, il n'est pas possible d'avoir un autre $\boxed{2}$, puisque chaque $\boxed{2}$ contient 2018 chiffres.
Il y a deux choix pour chacun des 2017 chiffres. Il y a donc 2^{2017} nombres de Bauman de cette forme.
Si on fait glisser les 2020 chiffres $1\boxed{2}1$ d'une position vers la droite, on obtient un nombre de la forme $X_1 1\boxed{2}1X_{2016}$.
Il y a toujours 2^{2017} façons de choisir les 2017 chiffres.
On fait glisser les 2020 chiffres successivement d'une position vers la droite pour obtenir les nombres de la forme $X_2 1\boxed{2}1X_{2015}$, $X_3 1\boxed{2}1X_{2014}$, $X_4 1\boxed{2}1X_{2013}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que $1\boxed{2}1$ se retrouve à la fin du nombre et que l'on obtienne un nombre de la forme $X_{2017}1\boxed{2}1$.
Pour chacun de ces nombres, il y a 2 façons de choisir chacun des 2017 autres chiffres. Il y a donc 2^{2017} nombres de Bauman de cette forme.
En d'autres mots, pour chaque nombre de Bauman d'une des formes

$$1\boxed{2}1X_{2017}, X_1 1\boxed{2}1X_{2016}, X_2 1\boxed{2}1X_{2015}, X_3 1\boxed{2}1X_{2014}, \ldots, X_{2016}1\boxed{2}1X_1, X_{2017}1\boxed{2}1,$$

il y a 2^{2017} façons de choisir les autres chiffres.
Puisqu'il y a 2018 telles formes, chacune avec 2^{2017} façons de choisir les autres chiffres, il y a $2018 \cdot 2^{2017}$ nombres de Bauman qui satisfont aux conditions du cas (iii).

Le nombre de nombres de Bauman de 4037 chiffres qui incluent au moins une tranche d'exactement 2018 chiffres 2 est égal à :

$$\begin{aligned} 2^{2018} + 2^{2018} - 1 + 2018 \cdot 2^{2017} &= 2 \cdot 2^{2018} - 1 + 1009 \cdot 2 \cdot 2^{2017} \\ &= 2 \cdot 2^{2018} - 1 + 1009 \cdot 2^{2018} \\ &= 1011 \cdot 2^{2018} - 1 \end{aligned}$$