Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le jeudi 12 avril 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2018
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 75 minutes

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4 **Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable, telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera, (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 2 ou 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Monsieur Singh donne une interrogation écrite à ses élèves à chaque semaine.

   (a) Lors des six premières interrogations, Aneesh a obtenu des notes de 17, 13, 20, 12, 18 et 10. Quelle est la moyenne de ses notes ?

   (b) Jon a obtenu des notes de 17 et de 12 lors des deux premières interrogations. Après la troisième interrogation, il avait une note moyenne de 14. Quelle note a-t-il obtenue lors de la troisième interrogation ?

   (c) Après les six premières interrogations, Dina avait une note moyenne de 14. Lors de chacune des n interrogations suivantes, Dina a obtenu une note de 20 sur 20. Après toutes ces interrogations, elle avait une note moyenne de 18. Déterminer la valeur de n.

2. Chaque jour, Jessica conduit de Bobourg à Aville, une distance de 120 km. Pendant le trajet, le système de navigation de la voiture met à jour constamment l'heure prévue d'arrivée (HPA) à Aville. La voiture calcule la HPA en supposant que Jessica conduira jusqu'à destination à une vitesse de 80 km/h.

   (a) Lundi, Jessica a conduit à la vitesse de 90 km/h. Combien de minutes Jessica a-t-elle mis pour conduire de Bobourg à Aville ?

   (b) Mardi, Jessica a quitté Bobourg à 7 h 00. Quelle HPA l'auto a-t-elle indiquée à 7 h 00 ?

   (c) Mardi, Jessica a conduit à la vitesse de 90 km/h. Quelle HPA l'auto a-t-elle indiquée à 7 h 16 ?

   (d) Mercredi, Jessica a remarqué la HPA indiquée par la voiture en partant de Bobourg. Pendant la première partie du trajet, Jessica a conduit à la vitesse de 50 km/h. Pendant le reste du trajet, elle a conduit à la vitesse de 100 km/h. Elle est arrivée à Aville à la HPA indiquée par la voiture au départ de Bobourg. Déterminer la distance parcourue à la vitesse de 100 km/h.

3. Une suite $T_1, T_2, T_3, \ldots$ est telle que $T_1 = 1$ et $T_2 = 2$; chacun des termes suivants est 1 de plus que le produit de tous les termes précédents. Ainsi $T_{n+1} = 1 + T_1T_2T_3 \cdots T_n$ pour tous les entiers n ($n \geq 2$). Par exemple, $T_3 = 1 + T_1T_2$, ou $T_3 = 3$.

(a) Quelle est la valeur de T_5 ?

(b) Démontrer que $T_{n+1} = T_n^2 - T_n + 1$ pour tous les entiers n ($n \geq 2$).

(c) Démontrer que $T_n + T_{n+1}$ est un diviseur de $T_nT_{n+1} - 1$ pour tous les entiers n ($n \geq 2$).

(d) Démontrer que T_{2018} n'est pas un carré parfait.

4. (a) On considère deux paraboles définies par les équations $y = x^2 - 8x + 17$ et $y = -x^2 + 4x + 7$.

   (i) Déterminer les coordonnées des sommets S_1 et S_2 de ces deux paraboles.

   (ii) Supposons que ces deux paraboles se coupent aux points P et Q. Expliquer pourquoi le quadrilatère S_1PS_2Q est un parallélogramme.

(b) Les deux paraboles définies par les équations $y = -x^2 + bx + c$ et $y = x^2$ ont pour sommets respectifs S_3 et S_4. Pour certaines valeurs de b et de c, ces paraboles se coupent aux points R et T.

   (i) Déterminer tous les couples (b, c) pour lesquels les points R et T existent et les points S_3, S_4, R et T sont distincts.

   (ii) Déterminer tous les couples (b, c) pour lesquels les points R et T existent, les points S_3, S_4, R et T sont distincts et le quadrilatère S_3RS_4T est un rectangle.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2018! Chaque année, plus de 240 000 élèves, provenant de 75 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2018.

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— des copies gratuites des concours précédents

— des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir

— des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au `cemc.uwaterloo.ca` pour :

— obtenir des renseignements au sujet des concours de 2018/2019

— inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre

— jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} année

— vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne

— vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne

— vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants

— trouver les résultats de vos élèves dans les coucours