Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2018

le jeudi 12 avril 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 13 avril 2018
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) La moyenne est égale à $\dfrac{17+13+20+12+18+10}{6}$, ou $\dfrac{90}{6}$, ou 15.

(b) Après la troisième interrogation, Jon avait une moyenne de 14. La somme de ses trois résultats était donc égale à 14×3, ou 42.
La somme de ses deux premières notes était égale à $17+12$, ou 29. Il a donc obtenu une note de 13 ($42-29=13$) lors de la troisième interrogation.
(On peut vérifier que la moyenne de $17, 12$ et 13 est égale à $\dfrac{17+12+13}{3}$, ou 14.)

(c) *Solution 1*
Après ses 6 premières interrogations, Dina avait une moyenne de 14 et à la fin, elle avait une moyenne de 18.
Après ses 6 premières interrogations, Dina avait donc un déficit de 4 points par interrogation ($18-14=4$) par rapport à sa moyenne finale de 18, c'est-à-dire un déficit total de 24 points ($6 \times 4 = 24$).
Dans chaque interrogation suivante, Dina a obtenu une note de 20. Chacune de ces n interrogations lui rachète donc 2 points ($20-18=2$) par rapport à sa moyenne finale.
Puisqu'elle a un déficit de 24 points à combler et qu'elle rachète 2 points par interrogation, il lui faut 12 interrogations ($24 \div 2 = 12$) pour obtenir une moyenne de 18.
Donc, $n = 12$.

Solution 2
Dina a subi 6 interrogations, suivies de n autres interrogations pour un total de $n+6$ interrogations.
Après ses 6 premières interrogations, Dina avait une moyenne de 14 points pour un total de 84 points ($14 \times 6 = 84$).
Dina a obtenu 20 points sur chacune des n interrogations suivantes pour un total de $20n$ points.
En tout, elle a obtenu $84+20n$ points dans $n+6$ interrogations.
Puisque Dina avait une moyenne de 18 après $n+6$ interrogations, elle avait un total de $18(n+6)$ points.
Donc $84+20n = 18(n+6)$, d'où $84+20n = 18n+108$, ou $2n = 24$, ou $n = 12$.

2. (a) De Bobourg à Aville, il y a une distance de 120 km.
Jessica a parcouru cette distance à une vitesse de 90 km/h. Elle a donc mis $\dfrac{120}{90}$ heure, ou $\dfrac{4}{3}$ heure pour le faire. Cela correspond à $\dfrac{4}{3} \times 60$ minutes, ou 80 minutes.

(b) De Bobourg à Aville, il y a une distance de 120 km.
La voiture a prévu que Jessica conduirait sa voiture à une vitesse de 80 km/h et qu'elle mettrait donc $\dfrac{120}{80}$ heure, ou $\dfrac{3}{2}$ heure pour parcourir la distance, ce qui correspond à $\dfrac{3}{2} \times 60$ minutes, ou 90 minutes.
À 7 h 00, l'auto a indiqué une HPA de 8 h 30.

(c) Jessica a conduit sa voiture de 7 h 00 à 7 h 16 (pendant 16 minutes) à la vitesse de 90 km/h. Elle a donc parcouru une distance de $\dfrac{16}{60} \times 90$ km, ou 24 km à cette vitesse.
À 7 h 16, Jessica avait encore une distance de 96 km à parcourir (120 km$-$24 km $=$ 96 km).
L'auto a prédit que Jessica parcourrait cette distance à la vitesse de 80 km/h. Elle a

donc prédit que Jessica mettrait $\frac{96}{80}$ heure, ou $\frac{6}{5}$ heure pour le faire, ce qui correspond à $\frac{6}{5} \times 60$ minutes, ou 72 minutes.
La HPA indiquée était donc de 72 minutes après 7 h 16, soit 8 h 28.

(d) Comme dans la partie (b), l'auto a prédit que Jessica mettrait 90 minutes, ou 1,5 heure pour se rendre de Bobourg à Aville.
Soit d km la distance parcourue à 100 km/h. La distance parcourue à 50 km/h est donc $(120 - d)$ km.
Jessica a voyagé à la vitesse de 100 km/h pendant $\frac{d}{100}$ heure.
Elle a voyagé à la vitesse de 50 km/h pendant $\frac{120-d}{50}$ heure.
Puisque le temps prédit par la voiture pour voyager de Bobourg à Aville correspond au temps que Jessica a mis pour le trajet, alors $\frac{d}{100} + \frac{120-d}{50} = 1{,}5$.
L'équation devient $d + 2(120 - d) = 1{,}5 \times 100$, ou $-d + 240 = 150$, d'où $d = 90$.
Jessica a donc parcouru 90 km à la vitesse de 100 km/h.

3. (a) On sait que $T_1 = 1, T_2 = 2$ et $T_3 = 3$.
Donc :

$$T_4 = 1 + T_1T_2T_3 = 1 + (1)(2)(3) = 7, \text{ et}$$

$$T_5 = 1 + T_1T_2T_3T_4 = 1 + (1)(2)(3)(7) = 43$$

(b) *Solution 1*
Chaque terme après les deux premiers est égal à 1 de plus que le produit de tous les termes précédents. Donc $T_n = 1 + T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1}$.
Pour tous les entiers n ($n \geq 2$), on utilise $T_n = 1 + T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1}$:

$$\begin{aligned} M.D. &= T_n^2 - T_n + 1 \\ &= T_n(T_n - 1) + 1 \\ &= T_n(1 + T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1} - 1) + 1 \\ &= T_n(T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1}) + 1 \\ &= T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1}T_n + 1 \\ &= T_{n+1} \\ &= M.G. \end{aligned}$$

Solution 2
Pour tous les entiers n ($n \geq 2$), on utilise $T_n = 1 + T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1}$:

$$\begin{aligned} M.G. &= T_{n+1} \\ &= 1 + T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1}T_n \\ &= 1 + (T_1T_2T_3 \cdots T_{n-1})T_n \\ &= 1 + (T_n - 1)T_n \\ &= T_n^2 - T_n + 1 \\ &= M.D. \end{aligned}$$

(c) D'après la partie (b), on a $T_n + T_{n+1} = T_n + T_n^2 - T_n + 1 = T_n^2 + 1$, pour tous les entiers n ($n \geq 2$).
Donc :

$$\begin{aligned} T_nT_{n+1} - 1 &= T_n(T_n^2 - T_n + 1) - 1 \\ &= T_n^3 - T_n^2 + T_n - 1 \\ &= T_n^2(T_n - 1) + T_n - 1 \\ &= (T_n - 1)(T_n^2 + 1) \end{aligned}$$

Puisque $T_n + T_{n+1} = T_n^2 + 1$ et que $T_n^2 + 1$ est un facteur de $T_nT_{n+1} - 1$, alors $T_n + T_{n+1}$ est un facteur de $T_nT_{n+1} - 1$ pour tous les entiers n ($n \geq 2$).

(d) D'après la partie (b), on a $T_{2018} = T_{2017}^2 - T_{2017} + 1$.
Puisque T_{2017} est un entier supérieur à 1, alors $T_{2017}^2 - T_{2017} + 1 > T_{2017}^2 - 2T_{2017} + 1$ et $T_{2017}^2 - T_{2017} + 1 < T_{2017}^2$.
Donc, $T_{2017}^2 - 2T_{2017} + 1 < T_{2017}^2 - T_{2017} + 1 < T_{2017}^2$ ou $(T_{2017} - 1)^2 < T_{2018} < T_{2017}^2$.
Puisque $T_{2017} - 1$ et T_{2017} sont deux entiers consécutifs, $(T_{2017} - 1)^2$ et T_{2017}^2 sont deux carrés parfaits consécutifs. Donc, T_{2018} est situé entre deux carrés parfaits et ne peut donc pas être un carré parfait.

4. (a) (i) On récrit les équations sous forme canonique en complétant le carré :

$$y = x^2 - 8x + 17 = x^2 - 8x + 16 + 1 = (x-4)^2 + 1, \text{ et}$$

$$y = -x^2 + 4x + 7 = -(x^2 - 4x + 4) + 11 = -(x-2)^2 + 11$$

La parabole d'équation $y = x^2 - 8x + 17$ a pour sommet $S_1(4, 1)$ et la parabole d'équation $y = -x^2 + 4x + 7$ a pour sommet $S_2(2, 11)$.

(ii) Les coordonnées des points d'intersection P et Q satisfont aux deux équations.
On a donc :

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 17 &= -x^2 + 4x + 7 \\ 2x^2 - 12x + 10 &= 0 \\ x^2 - 6x + 5 &= 0 \\ (x-5)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Les paraboles se coupent donc aux points $P(5, 2)$ et $Q(1, 10)$.
Pour démontrer que le quadrilatère S_1PS_2Q est un parallélogramme, on démontrera que ses diagonales se coupent en leur milieu.
Le milieu de la diagonale S_1S_2 est le point $\left(\dfrac{4+2}{2}, \dfrac{1+11}{2}\right)$, ou $(3, 6)$. Le milieu de la diagonale PQ est le point $\left(\dfrac{5+1}{2}, \dfrac{2+10}{2}\right)$, ou $(3, 6)$.
Puisque les deux diagonales ont le même milieu $(3, 6)$, les diagonales se coupent en leur milieu et S_1PS_2Q est donc un parallélogramme.
(On aurait pu démontrer que les côtés opposés de S_1PS_2Q sont parallèles deux à deux.)

(b) (i) On récrit l'équation $y = -x^2 + bx + c$ sous forme canonique en complétant le carré :

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + bx + c \\ &= -(x^2 - bx) + c \\ &= -\left(x^2 - bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}\right) + c \\ &= -\left(x^2 - bx + \frac{b^2}{4}\right) + \frac{b^2}{4} + c \\ &= -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} + c \end{aligned}$$

Le sommet de la parabole définie par cette équation est le point $S_3\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4} + c\right)$ et le sommet de la parabole d'équation $y = x^2$ est le point $S_4(0, 0)$.

On détermine d'abord les conditions sur b et c pour lesquelles les points d'intersection R et T existent et sont distincts.
Aux points d'intersection, on a $-x^2 + bx + c = x^2$, ou $2x^2 - bx - c = 0$.
Cette équation admet deux racines réelles distinctes lorsque son discriminant est supérieur à 0, c'est-à-dire lorsque $b^2 - 4(2)(-c) > 0$.

Les points d'intersection R et T existent et sont distincts lorsque $c > \frac{-b^2}{8}$.

On détermine ensuite les conditions sur b et c pour lesquelles R et T sont distincts de S_3 et de S_4.

L'équation $2x^2 - bx - c = 0$ a pour racines $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 8c}}{4}$.

Soit $x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 8c}}{4}$ l'abscisse de R et $x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 8c}}{4}$ l'abscisse de T.

Les points R et T ne sont pas distincts de S_4 lorsque $\frac{b \pm \sqrt{b^2 + 8c}}{4} = 0$, ou $b = \mp\sqrt{b^2 + 8c}$, ou $b^2 = b^2 + 8c$, ou $c = 0$.
On doit donc avoir $c \neq 0$.

De même, les points R et T ne sont pas distincts de S_3 lorsque $\frac{b \pm \sqrt{b^2 + 8c}}{4} = \frac{b}{2}$, ou $b \pm \sqrt{b^2 + 8c} = 2b$, ou $\pm\sqrt{b^2 + 8c} = b$, ou $b^2 + 8c = b^2$, ou $c = 0$.
On doit donc avoir $c \neq 0$.
(Puisque R et S_4 sont situés sur la même parabole, alors ils sont distincts lorsque leurs abscisses sont distinctes. Il n'est donc pas nécessaire de considérer leurs ordonnées. Il en est de même des points T et S_4, des points R et S_3 et des points T et S_3.)

Enfin il faut que les sommets des paraboles, $S_3\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4} + c\right)$ et $S_4(0, 0)$, soient distincts.

Les sommets S_3 et S_4 sont distincts si lorsqu'ils ont la même abscisse, leurs ordonnées sont distinctes (S_3 et S_4 sont situées sur des paraboles différentes et on doit donc considérer leurs deux coordonnées).
Si $\frac{b}{2} = 0$, ou $b = 0$, alors $\frac{b^2}{4} + c = \frac{0^2}{4} + c = c$. Puisqu'on a déjà la condition préalable $c \neq 0$, alors les sommets S_3 et S_4 sont distincts lorsque $c \neq 0$.

Si les deux conditions $c > \frac{-b^2}{8}$ et $c \neq 0$ sont vérifiées, alors pour tous couples (b, c), les points R and T existent et les points S_3, S_4, R et T sont distincts.

(ii) On suppose que les conditions sur b et c de la partie (b)(i) sont vérifiées.
Donc, les points R et T existent et les points S_3, S_4, R et T sont distincts.
Pour que le quadrilatère S_3RS_4T soit un rectangle, il suffit que ses côtés soient parallèles deux à deux et que deux de ses côtés adjacents soient perpendiculaires.
D'après la partie (b) (i), les paraboles se coupent en $R(x_1, x_1^2)$ et $T(x_2, x_2^2)$ (R et T sont situés sur la parabole d'équation $y = x^2$ et ils ont pour ordonnée respective x_1^2 et x_2^2).
On sait que x_1 et x_2 sont les racines distinctes de l'équation $2x^2 - bx - c = 0$.
La somme de ces racines est égale à $\frac{b}{2}$. On a donc $x_1 + x_2 = \frac{b}{2}$.
Le produit de ces racines est égal à $\frac{-c}{2}$. On a donc $x_1x_2 = \frac{-c}{2}$.

On montrera d'abord que le quadrilatère S_3RS_4T est un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu.

Le milieu de la diagonale S_3S_4 est le point $\left(\frac{\frac{b}{2}+0}{2}, \frac{\frac{b^2}{4}+c+0}{2}\right)$, ou $\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{8}+\frac{c}{2}\right)$, ou $\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2+4c}{8}\right)$.

Le milieu de la diagonale RT est le point $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)$.

Or, $x_1 + x_2 = \frac{b}{2}$ et $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-c}{2}\right)$. Le milieu de RT est donc le point $\left(\frac{\frac{b}{2}}{2}, \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}{2}\right)$, ou $\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{8}+\frac{c}{2}\right)$, ou $\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2+4c}{8}\right)$.
Puisque le milieu de la diagonale S_3S_4 est le même que le milieu de la diagonale RT, les diagonales se coupent en leur milieu. Donc, S_3RS_4T est un parallélogramme.

On démontrera maintenant que deux côtés adjacents du parallélogramme S_3RS_4T sont perpendiculaires. (Un tel parallélogramme est un rectangle.)
La pente de S_4T est égale à $\frac{x_2^2-0}{x_2-0}$, ou x_2 puisque $x_2 \neq 0$ ($T(x_2, x_2^2)$ et $S_4(0,0)$ sont des points distincts).
De même, la pente de S_4R est égale à $\frac{x_1^2-0}{x_1-0}$, ou x_1 puisque $x_1 \neq 0$ ($R(x_1, x_1^2)$ et $S_4(0,0)$ sont des points distincts).
Les côtés S_4T et S_4R sont perpendiculaires si le produit x_1x_2 de leurs pentes est égal à -1.
Puisque $x_1x_2 = \frac{-c}{2}$, alors les côtés sont perpendiculaires si $\frac{-c}{2} = -1$, ou $c = 2$.

En plus de la condition $c = 2$, les deux conditions $c > \frac{-b^2}{8}$ et $c \neq 0$ de la partie (b) (i) doivent aussi être vérifiées.
Puisque $c = 2$, alors $c \neq 0$.
Lorsque $c = 2$, la condition $c > \frac{-b^2}{8}$ devient $2 > \frac{-b^2}{8}$, ou $b^2 > -16$. Elle est vérifiée pour toutes les valeurs réelles de b.
Les points R et T existent, les points S_3, S_4, R et T sont distincts et le quadrilatère S_3RS_4T est un rectangle pour tous les couples (b, c) où $c = 2$ et b est n'importe quel nombre réel.