



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e année – Sec. IV)

le mercredi 5 avril 2023

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 6 avril 2023

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 75 minutes

©2023 University of Waterloo

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 2 ou 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.



ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

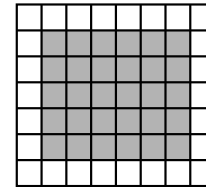
Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.





Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Dans les casse-têtes, les pièces sont souvent disposées en rangées et en colonnes de manière à former une grille rectangulaire où chaque cellule dans la grille représente une pièce. Chaque grille comporte deux types de pièces : les *pièces de bord* qui forment le bord extérieur de la grille et les *pièces centrales* qui forment l'intérieur de la grille. Dans l'exemple ci-contre, il y a 7 rangées et 8 colonnes et les pièces centrales sont ombrées.



-  (a) Combien y a-t-il de pièces au total dans une grille composée de 12 rangées et de 15 colonnes ?
-  (b) Combien y a-t-il de pièces centrales dans une grille composée de 6 rangées et de 4 colonnes ?
-  (c) Si une grille comprend 14 pièces centrales, elle comprend soit s pièces de bord, soit t pièces de bord. Déterminer les valeurs de s et t .
-  (d) Une grille composée de 5 rangées et de c colonnes comprend le même nombre de pièces de bord que de pièces centrales. Déterminer la valeur de c .

2. Une suite *Ing* est une suite dont le premier terme est un entier strictement positif et dont chaque terme, après le premier, est obtenu de la manière suivante :
- si un terme, soit x , est impair, le terme suivant est $x + 3$ et
 - si un terme, soit x , est pair, le terme suivant est $x + 4$.

Par exemple, si le premier terme d'une suite Ing est 13, alors le deuxième terme est 16 et le troisième terme est 20.



(a) Si le premier terme d'une suite Ing est 7, quel est le cinquième terme de la suite ?



(b) Si le cinquième terme d'une suite Ing est 62, quelles sont les deux possibilités pour le premier terme ?



(c) Si le premier terme d'une suite Ing est 49, déterminer les termes qui paraissent dans la suite dont les valeurs sont à la fois supérieures à 318 et inférieures à 330.

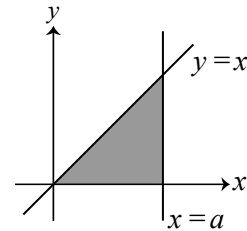


(d) Le nombre 18 paraît quelque part dans une suite Ing après le premier terme. Si le premier terme est l'entier strictement positif n , déterminer toutes les valeurs possibles de n .

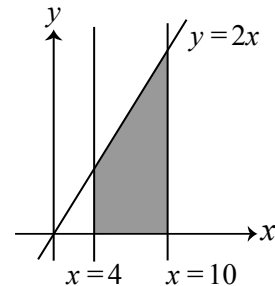
3.



(a) Dans la figure ci-contre, le triangle ombré est borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = x$ et $x = a$ ($a > 0$). Si le triangle a une aire de 32, quelle est la valeur de a ?



(b) Un triangle est borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = 2x$ et $x = 10$. Diego trace la droite verticale $x = 4$. Comme on le voit dans la figure ci-contre, cette droite coupe le triangle initial en un trapèze ombré et un petit triangle non ombré. Quelle est l'aire du trapèze ombré ?



(c) Un triangle est borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = 3x$ et $x = 21$. Alice trace la droite verticale $x = c$ ($0 < c < 21$). Cette droite coupe le triangle initial en un trapèze et un petit triangle. Si le trapèze a une aire qui est égale à 8 fois l'aire du petit triangle, déterminer la valeur de c .



(d) Un triangle est borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = 4x$ et $x = 1$. Ahmed trace une première droite verticale, soit $x = p$ ($0 < p < 1$). Cette droite coupe le triangle initial en deux parties de même aire. Ahmed trace ensuite une deuxième droite verticale, soit $x = q$ ($0 < q < p$). Cette droite coupe le triangle borné par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = 4x$ et $x = p$ en deux parties de même aire. Ahmed continue de tracer des droites verticales à des valeurs décroissantes de x de manière que chacune de ces droites coupe le triangle précédent en deux parties de même aire. Si la 12^e droite verticale qu'il trace a pour équation $x = k$, déterminer la valeur de k .

4. Lorsqu'un groupe de personnes se regroupe pour une réunion, chaque personne peut soit serrer la main de toutes les autres personnes, serrer la main de quelques personnes ou ne serrer la main de personne. De plus, aucune personne ne serre la main d'une autre personne plus d'une fois. Lorsque deux personnes se serrent la main, on compte cela comme une seule poignée de main.



(a) Lors d'une réunion de 5 personnes, Amrita a serré la main d'exactly 1 personne, Bin et Carlos ont serré la main d'exactly 2 personnes chacun, Denis a serré la main d'exactly 3 personnes et Éloïse n'a serré la main de personne. Combien de poignées de main ont été données ?



(b) Lors d'une réunion de 9 personnes, chaque participant a déclaré avoir serré la main d'exactly 3 personnes. Expliquer pourquoi cela n'est pas possible.



(c) Lors d'une réunion de 7 personnes, au moins une poignée de main a été donnée dans chaque groupe de 3 personnes. Déterminer le nombre minimum possible de poignées de main, m , qui ont été données lors de cette réunion. Une solution complète doit comprendre : la valeur de m , une explication de la manière dont les conditions données peuvent être satisfaites avec un ensemble spécifique de m poignées de main et une explication de la raison pour laquelle on ne peut avoir moins de m poignées de main pour satisfaire aux conditions données.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2023! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2023.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2023/2024
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours