35e Anniversaire
1963 – 1998

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1998 Solutions

Concours Gauss

(7e année – Sec. I)

Partie A

1. La valeur de $\frac{1998-998}{1000}$ est :

(**A**) 1 (**B**) 1000 (**C**) 0,1 (**D**) 10 (**E**) 0,001

Solution

$\frac{1998-998}{1000}=\frac{1000}{1000}=1$ RÉPONSE : (A)

2. Si on triple le nombre 4567, le chiffre des unités du nombre obtenu est :

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 3 (**E**) 1

Solution

On veut tripler le nombre 4567.
Pour déterminer le chiffre des unités du nombre obtenu, il suffit de tripler le 7. On choisit alors le chiffre des unités du nombre 21.
Le chiffre est 1. RÉPONSE : (E)

3. Si $S = 6\times 10\ 000 + 5\times 1000 + 4\times 10 + 3\times 1$, lequel des nombres suivants est égal à S?

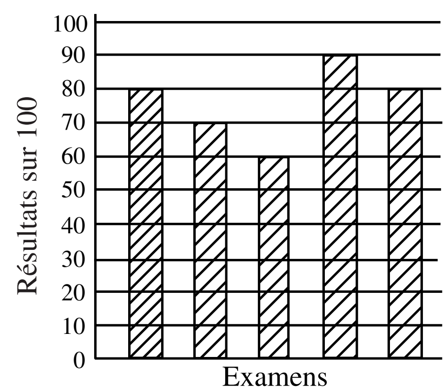
(**A**) 6543 (**B**) 65 043 (**C**) 65 431 (**D**) 65 403 (**E**) 60 541

Solution

$S = 60\ 000 + 5000 + 40 + 3$
$= 65\ 043$ RÉPONSE : (B)

4. Jeanne écrit cinq examens. Ses résultats sont représentés sur le diagramme. Quelle est la moyenne de ses cinq résultats?

(**A**) 74 (**B**) 76 (**C**) 70
(**D**) 64 (**E**) 79



Solution

Sa moyenne est égale à $\frac{80+70+60+90+80}{5}=\frac{380}{5}=76$. RÉPONSE : (B)

5. Une machine produit 150 items dans une minute. Combien d'items produit-elle en 10 secondes?

(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 20 (**D**) 25 (**E**) 30

Solution

Puisque 10 secondes représentent un sixième d'une minute, la machine produit $\frac{1}{6}\times 150$ ou 25 items en 10 secondes.

RÉPONSE : (D)

6. Dans cette multiplication, la somme des chiffres dans les quatre cases est égale à :

(**A**) 13 (**B**) 12 (**C**) 27
(**D**) 9 (**E**) 22

$$\begin{array}{r} 879 \\ \times\, 492 \\ \hline \square 758 \\ 7\square 11 \\ 35\square 6 \\ \hline 43\square 468 \end{array}$$

Solution

On multiplie au long :

$$\begin{array}{r} 879 \\ \times\, 492 \\ \hline 1758 \\ 7911 \\ 3516 \\ \hline 432468 \end{array}$$

La somme est égale à $1+9+1+2$ ou 13.

RÉPONSE : (A)

7. Un champ rectangulaire a une longueur de 80 m et une largeur de 60 m. Pour clôturer le champ, on place des poteaux aux quatre coins et un poteau à tous les 10 m le long des quatre côtés. Combien faut-il de poteaux pour clôturer le champ?

(**A**) 24 (**B**) 26 (**C**) 28 (**D**) 30 (**E**) 32

Solution

Il y a un poteau à chaque coin. De plus, il y a 7 autres poteaux sur chaque longueur et 5 autres poteaux sur chaque largeur.
Il y a donc un total de $4+7+7+5+5$ ou 28 poteaux.

RÉPONSE : (C)

8. Mardi, la température maximale était de 4 °C plus chaude que celle de lundi. Mercredi, la température maximale était de 6 °C plus froide que celle de lundi. Mardi, la température maximale était égale à 22 °C. Quelle était la température maximale de mercredi?

(**A**) 20 °C (**B**) 24 °C (**C**) 12 °C (**D**) 32 °C (**E**) 16 °C

Solution

Puisque la température maximale était de 22 °C mardi, elle était de 18 °C lundi.
La température maximale de mercredi était de 12 °C, puisqu'elle était de 6 °C plus froide que celle de lundi.

RÉPONSE : (C)

9. Deux nombres ont une somme de 32. Si un des nombres est -36, quel est l'autre nombre?

(**A**) 68 (**B**) -4 (**C**) 4 (**D**) 72 (**E**) -68

Solution

$68+(-36)=32$ RÉPONSE : (A)

10. Au parc, Brigitte et Danielle font une course en descendant une glissoire d'eau. Danielle a gagné par 0,25 seconde. Si Brigitte a mis 7,80 secondes pour descendre, combien de temps Danielle a-t-elle mis pour sa descente?

(**A**) 7,80 secondes (**B**) 8,05 secondes (**C**) 7,55 secondes
(**D**) 7,15 secondes (**E**) 7,50 secondes

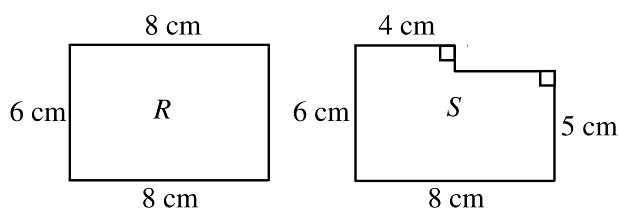
Solution

Puisque Danielle a mis 0,25 seconde de moins que Brigitte, elle a mis $7{,}80-0{,}25$ ou 7,55 secondes.

RÉPONSE : (C)

Partie B

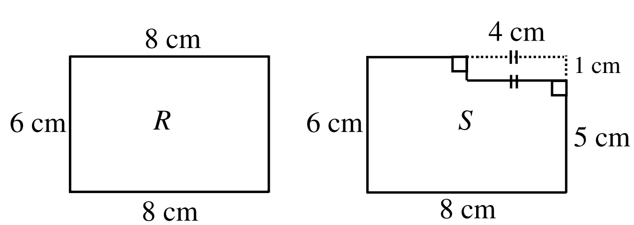
11. Eric a découpé le rectangle *R* d'une feuille de papier. Il a ensuite découpé la figure *S* du rectangle *R*. Les coupes sont parallèles aux côtés du rectangle initial. Lorsqu'on passe du rectangle *R* à la figure *S* :



(**A**) l'aire et le périmètre diminuent tous les deux;
(**B**) l'aire diminue et le périmètre augmente;
(**C**) l'aire et le périmètre augmentent tous les deux;
(**D**) l'aire augmente et le périmètre diminue;
(**E**) l'aire diminue et le périmètre demeure inchangé.

Solution

Puisque la figure *S* a été découpée du rectangle *R*, alors l'aire de *S* doit être plus petite.
Si on compare les périmètres, on constate que le périmètre de la figure *S* est identique à celui du rectangle *R*.
La comparaison est plus facile à voir si on complète la figure *S* comme dans le diagramme ci-dessous. Les périmètres de *R* et de *S* sont égaux.



RÉPONSE : (E)

12. Sophie peut planter dix arbres à toutes les trois minutes. Si elle continue à ce même rythme, combien de temps mettra-t-elle pour planter 2500 arbres?

(**A**) $1\frac{1}{4}$ h (**B**) 3 h (**C**) 5 h (**D**) 10 h (**E**) $12\frac{1}{2}$ h

Solution 1

Puisque Sophie peut planter dix arbres à toutes les trois minutes, elle met $\frac{3}{10}$ de minute pour planter un arbre.

Pour planter 2500 arbres, elle met $\frac{3}{10} \times 2500 = 750$ minutes ou $\frac{750}{60} = 12\frac{1}{2}$ heures.

Solution 2

Puisque Sophie peut planter dix arbres à toutes les trois minutes, elle peut planter 200 arbres par heure.

Pour planter 2500 arbres, elle devra mettre $\frac{2500}{200} = 12\frac{1}{2}$ heures. RÉPONSE : (E)

13. Un groupe de figures △●□▲○ forme une régularité qui est répétée dans l'ordre suivant,

△,●,□,▲,○,△,●,□,▲,○, ..., pour former une suite.

La 214e figure de la suite est :

(**A**) △ (**B**) ● (**C**) □ (**D**) ▲ (**E**) ○

Solution

Puisque la régularité est répétée à toutes les cinq figures, elle recommence après la 210e figure.

La 214e figure de la suite est donc la quatrième figure du groupe, soit ▲ . RÉPONSE : (D)

14. Un cube a un volume de 125 cm^3. Quelle est l'aire d'une des faces du cube?

(**A**) 20 cm^2 (**B**) 25 cm^2 (**C**) $41\frac{2}{3}\text{ cm}^2$ (**D**) 5 cm^2 (**E**) 75 cm^2

Solution

Puisque le cube a un volume de 125 cm^3, il doit avoit une largeur, une longueur et une hauteur de 5 cm.

Une des faces du cube doit donc avoir une aire de 5×5 ou 25 cm^2. RÉPONSE : (B)

15. Le diagramme illustre un carré magique. La somme des nombres dans n'importe quelle ligne, n'importe quelle colonne et n'importe quelle diagonale est toujours la même. Quelle est la valeur de n?

8		
9		5
4	n	

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 7
(**D**) 10 (**E**) 11

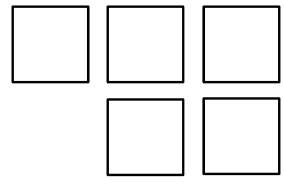
Solution

La somme « magique » est égale à $8+9+4$ ou 21. La case du centre contient donc un 7.

Puisque la case du centre est un 7, alors la case inférieure droite contient un 6, ce qui donne $4+n+6=21$.

Donc $n=11$. RÉPONSE : (E)

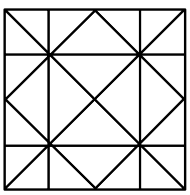
16. On place chacun des chiffres 3, 5, 6, 7 et 8 dans une des cases du diagramme. Si on soustrait le nombre de deux chiffres du nombre de trois chiffres, quelle est la plus petite différence possible?

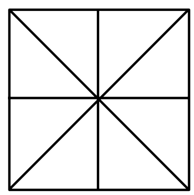


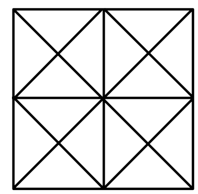
(**A**) 269 (**B**) 278 (**C**) 484
(**D**) 271 (**E**) 261

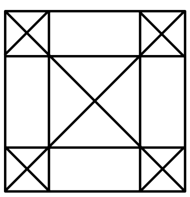
Solution
On obtient la plus petite différence possible lorsque le nombre de trois chiffres est le plus petit possible et que le nombre de deux chiffres est le plus grand possible. Les deux nombres sont alors 356 et 87. La plus petite différence possible est $356 - 87 = 269$. RÉPONSE : (A)

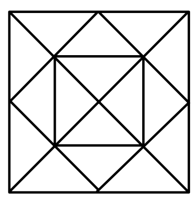
17. Claire prend un morceau de papier de forme carrée et le plie en deux parties égales, quatre fois de suite, sans déplier, de manière à former un triangle rectangle isocèle à chaque fois. Lorsqu'elle déplie le morceau de papier à la fin, les plis du papier ressemblent à :

(**A**) 

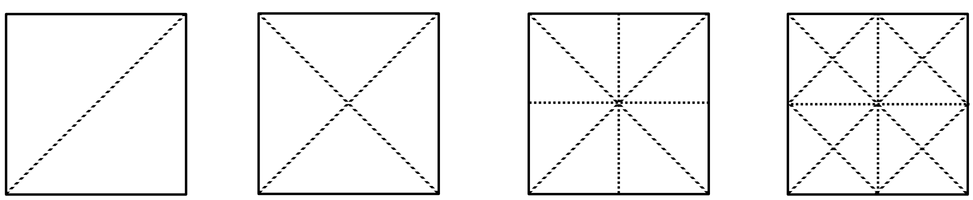
(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

Solution



1er pli 2e pli 3e pli 4e pli

RÉPONSE : (C)

18. On déplace les lettres du mot « GAUSS » et les chiffres de « 1998 » en boucles séparées et on les numérote comme suit :
1. AUSSG 9981
2. USSGA 9819
3. SSGAU 8199
etc.

Si cette régularité continue de la sorte, quel sera le numéro qui paraîtra devant GAUSS 1998?
(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 9 (**D**) 16 (**E**) 20

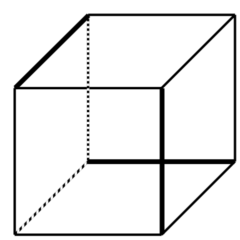
Solution
Puisque le mot « GAUSS » est composé de cinq lettres, il paraîtra aux numéros 5, 10, 15, 20, ... De même, « 1998 » étant composé de quatre chiffres, il paraîtra aux numéros 4, 8, 12, 16, 20, 24, ...
En examinant ces deux listes de nombres, on constate que GAUSS 1998 paraîtra au numéro 20 qui est le PPCM de 4 et de 5. RÉPONSE : (E)

19. Carlo et Marie jouent un à jeu à deux dans lequel le gagnant ou la gagnante gagne deux points, tandis que le perdant ou la perdante perd un point. Si Carlo a gagné exactement 3 parties et si Marie a un pointage final de 5, combien de parties ont-ils jouées?
(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 11

Solution
Puisque Carlo a gagné 3 parties, alors Marie a perdu 3 points. En supposant que ce soient les trois dernières parties que Carlo a gagnées, Marie devait donc avoir 8 points avant de perdre, de manière à finir avec 5 points.
Puisque Marie avait 8 points avant de perdre, elle a gagné 4 parties.
Puisque Marie a gagné 4 parties et que Carlo en a gagné 3, ils ont joué un total de 7 parties.
RÉPONSE : (A)

20. On a colorié en rouge ou en vert chacune des 12 arêtes d'un cube. Chaque face du cube contient au moins une arête rouge. Quel est le plus petit nombre possible d'arêtes rouges?
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Solution
Dans le diagramme, les arêtes foncées représentent les arêtes rouges et chaque face a ainsi une arête rouge. Le plus petit nombre possible d'arêtes rouges est donc 3.



RÉPONSE : (B)

Partie C

21. On inscrit 10 points à égales distances sur un cercle. Combien peut-on former de cordes en joignant n'importe quels deux de ces points? (Une corde est un segment de droite qui joint deux points situés sur un cercle.)
(**A**) 9 (**B**) 45 (**C**) 17 (**D**) 66 (**E**) 55

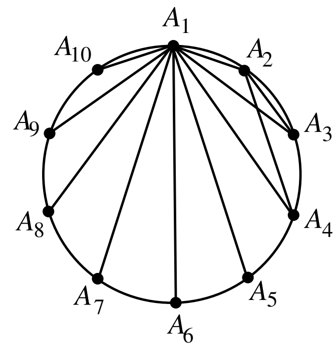
Solution

On nomme les points $A_1, A_2, ..., A_{10}$.

On choisit A_1 et on le joint à chacun des neuf autres points, ce qui nous donne 9 cordes.

De même, on peut joindre A_2 à chacun des 8 autres points.

On continue de cette façon jusqu'à ce que l'on joigne A_9 à A_{10}, ce qui donnera $9+8+7+6+5+4+3+2+1$ ou 45 cordes.



RÉPONSE : (B)

22. À chaque fois que l'on utilise un savon de toilette, son volume diminue de 10 %. Combien de fois faut-il utiliser un savon pour qu'il reste moins de la moitié du volume initial?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Solution

Nombre de fois que le savon est utilisé	Volume qu'il reste (en %)
1	0,9 ou 90 %
2	$(0,9)^2$ ou 81 %
3	$(0,9)^3$ ou 72,9 %
4	$(0,9)^4$ ou 65,61 %
5	$(0,9)^5$ ou 59,1 %
6	$(0,9)^6$ ou 53,1 %
7	$(0,9)^7$ ou 47,8 %

Si on utilise le savon 7 fois, il restera moins de $\frac{1}{2}$ du volume initial.

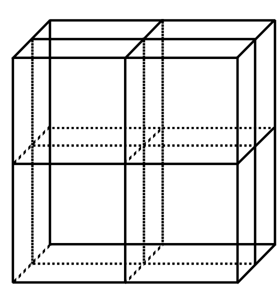
Remarque : On cherche un entier x tel que $(0,9)^x < 0,5$. On peut obtenir cette valeur de x à l'aide de la touche $\boxed{y^x}$ sur la calculatrice. On pose $y = 0,9$ et on procède par tâtonnement pour trouver la valeur de x.

RÉPONSE : (C)

23. Un cube mesure $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. On le coupe trois fois. Comme on peut le voir dans le diagramme, chaque coupe est parallèle à l'une des faces du cube. On obtient alors 8 solides. Quelle est l'augmentation dans l'aire totale de la surface?

(**A**) 300 cm^2 (**B**) 800 cm^2 (**C**) 1200 cm^2

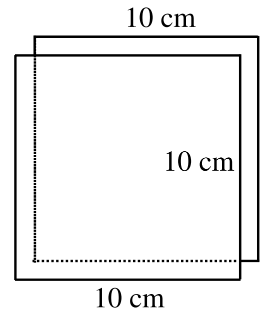
(**D**) 600 cm^2 (**E**) 0 cm^2



Solution

Chaque coupe augmente la surface de deux carrés mesurant $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. L'aire est donc augmentée de 200 cm^2.

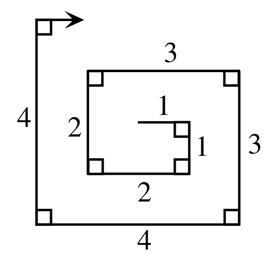
Avec les trois coupes, l'aire est augmentée de $3 \times 200 \text{ cm}^2$ ou 600 cm^2.



RÉPONSE : (D)

24. Sur une grande feuille de papier, Daniel trace une « spirale rectangulaire », comme dans le diagramme. Les segments successifs ont des longueurs, en centimètres, de 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ... Lorsqu'il a tracé une longueur totale de 3000 cm, son stylo n'a plus d'encre. Quelle est la longueur du plus grand segment que Daniel a tracé?

(**A**) 38 (**B**) 39 (**C**) 54
(**D**) 55 (**E**) 30



Solution

La somme des entiers de 1 à n est donnée par la formule $\frac{(n)(n+1)}{2}$.

On a donc $1+2+3+...+n = \frac{(n)(n+1)}{2}$.

(Par exemple, $1+2+3+...+10 = \frac{(10)(11)}{2} = 55$.)

L'égalité est conservée si on double chaque côté.

On a alors $2(1+2+...+n) = n(n+1)$.

Donc $(1+1)+(2+2)+(3+3)+...+(n+n) = n(n+1)$.

Dans notre problème, on cherche la plus grande valeur pour laquelle $(1+1)+(2+2)+(3+3)+...+(n+n) \le 3000$, ou si on utilise la formule, pour laquelle $(n)(n+1) \le 3000$.

On peut obtenir un estimé en prenant $\sqrt{3000} \doteq 54,7$.

On vérifie avec $n = 54$: On obtient $(54)(55) = 2970 < 3000$, ce qui est acceptable.

On vérifie avec $n = 55$: On obtient $55(56) = 3080 > 3000$, ce qui n'est pas acceptable.

On a donc $(1+1)+(2+2)+(3+3)+...+(54+54) = 2970$.

On vérifie aussi $(1+1)+(2+2)+(3+3)+...+(54+54)+55 = 3025$, ce qui n'est pas acceptable.

Le plus long segment que Daniel a tracé avait une longueur de 54 cm. RÉPONSE : (C)

25. On considère des nombres naturels, p et q, dont le dernier chiffre n'est pas un zéro, mais dont le produit est une puissance de 10 (c'est-à-dire 10, 100, 1000, 10 000 , ...). Si $p > q$, le dernier chiffre du nombre $p - q$ ne peut pas être un :

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

Solution

Puisque le dernier chiffre des nombres p et q n'est pas un zéro et puisque leur produit est une puissance de 10, alors p doit être de la forme 5^n et q doit être de la forme 2^n.

En effet, puisque $10 = 2 \times 5$, alors $10^n = (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$.

Les puissances de 2 sont 2, 4, 8, 16, 32, ... et les puissances correspondantes de 5 sont 5, 25, 125, 625, 3125, ...

On les soustrait et on examine le dernier chiffre de $p - q$:

p	q	dernier chiffre de $p - q$	
5	2	3	Cette régularité se répète en groupes de 4.
25	4	1	
125	8	7	
625	16	9	
3125	32	3	
15 625	64	1	
⋮	⋮	7	
		9	
		⋮	

Le dernier chiffre de $p - q$ ne peut donc pas être un 5. RÉPONSE : (C)