CONCOURS GAUSS 8^e

Partie A

1. $10^3 + 10^2 + 10$ est égal à :
(**A**) 1110 (**B**) 101 010 (**C**) 111 (**D**) 100 010 010 (**E**) 11 010

Solution
$10^3 + 10^2 + 10$
$= 1000 + 100 + 10$
$= 1110$
RÉPONSE : (A)

2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ est égal à :
(**A**) $\frac{2}{5}$ (**B**) $\frac{1}{6}$ (**C**) $\frac{1}{5}$ (**D**) $\frac{3}{2}$ (**E**) $\frac{5}{6}$

Solution
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$
$= \frac{5}{6}$
RÉPONSE : (E)

3. Laquelle des expressions suivantes donne un nombre impair?
(**A**) 6^2 (**B**) $23 - 17$ (**C**) 9×24 (**D**) 9×41 (**E**) $96 \div 8$

Solution 1
On évalue chaque expression.
(**A**) $6^2 = 36$ (**B**) $23 - 17 = 6$ (**C**) $9 \times 24 = 216$ (**D**) $9 \times 41 = 369$ (**E**) $96 \div 8 = 12$

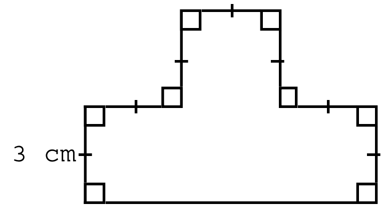
Solution 2
On pense aux propriétés des nombres pairs et des nombres impairs.
(**A**) (pair) × (pair) = pair
(**B**) (impair) – (impair) = pair
(**C**) (impair) × (pair) = pair
(**D**) (impair) × (impair) = impair
(**E**) (pair) ÷ (pair) = pair ou impair (Il faut évaluer.)
RÉPONSE : (D)

4. Lorsqu'on divise 82 460 par 8, quel reste obtient-on?
(**A**) 0 (**B**) 5 (**C**) 4 (**D**) 7 (**E**) 2

Solution
Lorsqu'on divise par 8, le reste est déterminé par les trois derniers chiffres. Il suffit donc de vérifier le reste lorsqu'on divise 460 par 8.

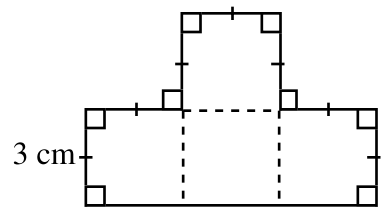
Puisque $460 = 8 \times 57 + 4$, le reste est 4. RÉPONSE : (C)

5. Dans le diagramme, les segments se rencontrent pour former des angles de $90°$. Si les petits segments mesurent 3 cm, quelle est l'aire de la figure, en centimètres carrés?



(**A**) 30 (**B**) 36 (**C**) 40
(**D**) 45 (**E**) 54

Solution
Les quatre carrés sont identiques.
Ils ont chacun une aire de : $3 \times 3 = 9$ cm^2
L'aire de la figure est égale à : $4 \times 9 = 36$ cm^2



RÉPONSE : (B)

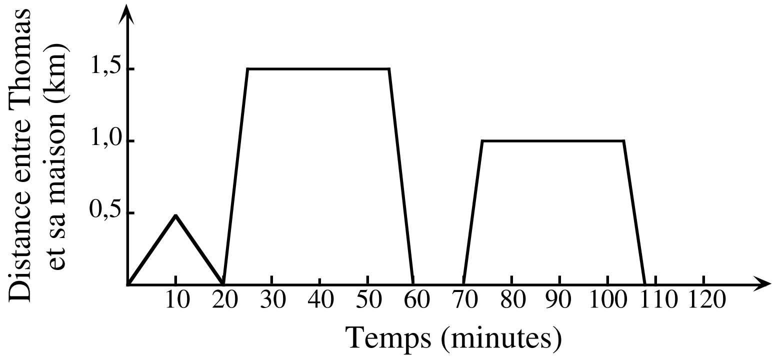
6. La moyenne des nombres -5, -2, 0, 4 et 8 est égale à :
(**A**) 1 (**B**) 0 (**C**) $\frac{19}{5}$ (**D**) $\frac{5}{4}$ (**E**) $\frac{9}{4}$

Solution
La moyenne est égale à : $\dfrac{(-5)+(-2)+0+4+8}{5} = 1$ RÉPONSE : (A)

7. Si on augmentait le taux d'une taxe de 7 % à 7,5 %, alors la taxe imposée sur un item de 1000 $ augmenterait de :
(**A**) 75,00 $ (**B**) 5,00 $ (**C**) 0,5 $ (**D**) 0,05 $ (**E**) 7,50 $

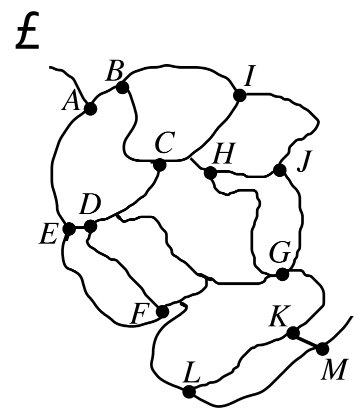
Solution
Si le taux augmente de 0,5 %, cela correspond à une augmentation de taxe de 0,50 $ sur chaque tranche de 100 $.
La taxe imposée sur un item de 1000 $ augmenterait donc de : $10 \times 0,50 = 5,00$ $.
RÉPONSE : (B)

8. Thomas a passé une partie de la matinée à rendre visite à des amis et à jouer avec eux. Le graphique illustre ses allées et venues. Il s'est rendu à la maison de chaque ami et il est resté jouer si l'ami y était. Le nombre de maisons où il est resté jouer est :
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5



Solution
Le graphique indique trois allées et venues. La première partie, en forme de triangle, indique qu'il s'est rendu à une maison, à 0,5 km de sa maison, et qu'il est revenu immédiatement.
Dans les deux autres cas, la ligne horizontale indique qu'il est resté.
Dans chacun de ces deux cas, il est demeuré une trentaine de minutes. RÉPONSE : (B)

9. Le diagramme est une carte indiquant des sentiers dans une forêt. André se propose de visiter les sites, de A à M, en ordre alphabétique. Il ne doit jamais revenir sur ses pas et il doit toujours procéder directement d'un site au suivant. Quel est le nombre maximal de sites qu'il peut visiter avant de briser l'ordre alphabétique?
(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8
(**D**) 10 (**E**) 13



Solution
En traçant à l'aide d'un crayon, on peut visiter les sites de A à J en ordre alphabétique, sans revenir sur ses pas. On constate alors qu'il est impossible de se rendre au site K sans passer par G ou sans retracer ses pas.
Puisque J est la dixième lettre de l'alphabet, André peut visiter un maximum de 10 sites avant de briser l'ordre alphabétique. RÉPONSE : (D)

10. Un jardin de forme rectangulaire a une aire de 28 m^2. Il a une longueur de 7 m. Son périmètre, en mètres, est égal à :
(**A**) 22 (**B**) 11 (**C**) 24 (**D**) 36 (**E**) 48

Solution
Puisque le jardin a une aire de 28 m^2 et une longueur de 7 m, sa largeur est égale à 4 m.
Son périmètre est égal à : $2(4+7)=22$ m RÉPONSE : (A)

Partie B

11. Lequel des nombres suivants est un nombre impair, contenant le chiffre 5, divisible par 3 et situé entre les nombres 12^2 et 13^2?

(**A**) 105 (**B**) 147 (**C**) 156 (**D**) 165 (**E**) 175

Solution

Puisque $12^2 = 144$ et $13^2 = 169$, on rejette les choix 105 et 175.
On rejette aussi le choix 156 qui est un nombre pair. Il reste 147 et 165. Puisque 147 ne contient pas le chiffre 5, ce choix est rejetté. Il ne reste plus que 165. On peut vérifier qu'il satisfait à toutes les conditions. RÉPONSE : (D)

12. Si $\dfrac{n+1999}{2} = -1$, alors la valeur de n est :

(**A**) -2001 (**B**) -2000 (**C**) -1999 (**D**) -1997 (**E**) 1999

Solution

Par logique, ou en multipliant chaque membre de l'équation par 2, on obtient $n+1999 = -2$, d'où $n = -2001$. RÉPONSE : (A)

13. L'expression $n!$ représente le produit des entiers positifs de 1 à n. Par exemple, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$. La valeur de $6! - 4!$ est :

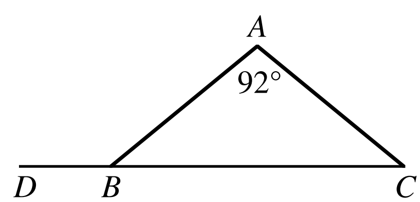
(**A**) 2 (**B**) 18 (**C**) 30 (**D**) 716 (**E**) 696

Solution

Puisqu'on a $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, alors $6! = 720$.
De même, $4! = 24$. Donc : $6! - 4! = 720 - 24$
$= 696$ RÉPONSE : (E)

14. Le triangle ABC est isocèle et $\angle A = 92°$. On a prolongé CB jusqu'au point D. Quelle est la mesure de $\angle ABD$?

(**A**) 88° (**B**) 44° (**C**) 92°
(**D**) 136° (**E**) 158°

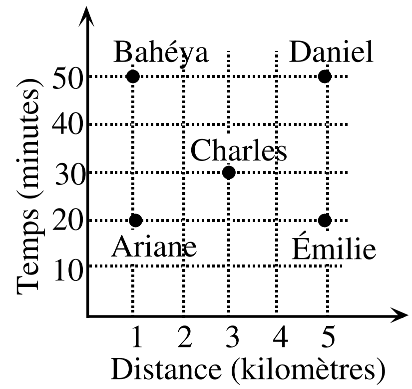


Solution

Puisque $\angle A = 92°$ et que le triangle est isocèle, les angles ABC et ACB sont congrus.
Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, alors $\angle ABC = 44°$ et $\angle ACB = 44°$.
Donc $\angle ABD = 180° - 44°$, d'où $\angle ABD = 136°$. RÉPONSE : (D)

15. Le graphique représente le temps que cinq personnes ont mis pour parcourir diverses distances. En moyenne, quelle personne était la plus rapide?

(**A**) Ariane (**B**) Bahéya (**C**) Charles
(**D**) Daniel (**E**) Émilie



Solution

Le tableau suivant indique les données du graphique, ainsi que leur vitesse moyenne.

On rappelle que vitesse moyenne $= \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$.

	Distance (km)	Temps (minutes)	Vitesse (km/min)
Ariane	1	20	$\frac{1}{20} = 0,05$
Bahéya	1	50	$\frac{1}{50} = 0,02$
Charles	3	30	$\frac{3}{30} = 0,10$
Daniel	5	50	$\frac{5}{50} = 0,10$
Émilie	5	20	$\frac{5}{20} = 0,25$

Émilie est la plus rapide. RÉPONSE : (E)

16. Dans un ensemble de cinq nombres, deux des nombres ont une moyenne de 12 et les trois autres nombres ont une moyenne de 7. La moyenne des cinq nombres est :

(**A**) $8\frac{1}{3}$ (**B**) $8\frac{1}{2}$ (**C**) 9 (**D**) $8\frac{3}{4}$ (**E**) $9\frac{1}{2}$

Solution

Puisque deux des nombres ont une moyenne de 12, leur somme est égale à 24.

Puisque les trois autres nombres ont une moyenne de 7, leur somme est égale à 21.

La somme des cinq nombres est donc égale à : $24 + 21 = 45$

La moyenne des cinq nombres est égale à : $\frac{45}{5} = 9$ RÉPONSE : (C)

17. Dans la soustraction $\begin{array}{r} 1957 \\ -\quad a9 \\ \hline 18b8 \end{array}$, la somme des chiffres a et b est égale à :

(**A**) 15 (**B**) 14 (**C**) 10 (**D**) 5 (**E**) 4

Solution 1
On soustrait pour obtenir :

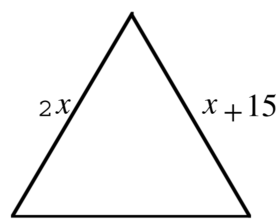
$$\begin{array}{cccc} & 8 & 14 & \\ 1 & \cancel{9} & \cancel{5} & 17 \\ & & a & 9 \\ \hline 1 & 8 & b & 8 \end{array}$$

D'après ce calcul, on a $14 - a = b$ ou $a + b = 14$.

Solution 2
On procède par tâtonnement en attribuant des valeurs à a et à b.
Par exemple, on peut supposer que $a + b = 15$ et que $a = 8$, $b = 7$. On fait la soustraction pour constater que ce choix n'est pas approprié.
Parmi les choix (**A**), (**B**) et (**C**), le seul pour lequel la soustraction fonctionne est $a + b = 14$.
On peut aussi observer que les choix $a + b = 4$ et $a + b = 5$ donnent des valeurs de a et de b qui sont trop petites pour la soustraction. RÉPONSE : (B)

18. Le triangle équilatéral illustré a un côté qui mesure $2x$ et un autre qui mesure $x + 15$. Le périmètre du triangle est égal à :

(**A**) 15 (**B**) 30 (**C**) 90
(**D**) 45 (**E**) 60



Solution
Puisque le triangle est équilatéral, alors $2x = x + 15$, d'où $x = 15$.
Chaque côté a donc une longueur de 30 et le périmètre est donc égal à 90. RÉPONSE : (C)

19. Lors d'une enquête sur la circulation, on a examiné 50 voitures en mouvement. On a remarqué que 20 % d'entre elles contenaient plus d'une personne. Parmi les voitures qui ne contenaient qu'une personne, 60 % avaient une femme au volant. Combien des voitures qui ne contenaient qu'une personne avaient un homme au volant?

(**A**) 10 (**B**) 16 (**C**) 20 (**D**) 30 (**E**) 40

Solution
Puisque 80 % des 50 voitures contiennent une seule personne et que $0{,}80 \times 50 = 40$, cela représente 40 voitures. Puisque 40 % de ces 40 voitures avaient un homme au volant et que $0{,}40 \times 40 = 16$, cela représente 16 voitures. RÉPONSE : (B)

20. On joue un jeu sur le tableau illustré. À chaque tour, on doit se déplacer de trois positions dans n'importe quelle direction (à droite, à gauche, vers le haut ou vers le bas), puis de deux positions dans une direction perpendiculaire à la première. Si on est en position S, laquelle des positions P, Q, R, T ou W ne peut jamais être obtenue de la manière décrite, peu importe le nombre de tours que l'on joue?

		P		
	Q		R	
		T		
S				W

(**A**) P (**B**) Q (**C**) R
(**D**) T (**E**) W

Solution
En partant de S, on peut atteindre la position R. En partant de S, on peut aussi atteindre la position P. On peut ensuite atteindre l'une après l'autre les positions W et Q. Pour arriver à la position T, il faudrait être placé à l'extérieur du tableau pour se déplacer de trois positions, puis de deux positions.

RÉPONSE : (D)

Partie C

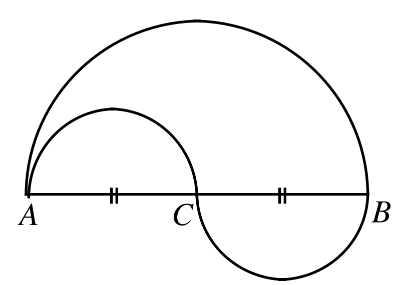
21. La somme de sept entiers consécutifs strictement positifs est toujours :
(**A**) impaire (**B**) un multiple de 7 (**C**) paire
(**D**) un multiple de 4 (**E**) un multiple de 3

Solution
On constate d'abord que :

$$\begin{aligned}1+2+3+4+5+6+7&=28\\2+3+4+5+6+7+8&=35\\3+4+5+6+7+8+9&=42\\&\vdots\end{aligned}$$

La somme de sept entiers consécutifs strictement positifs peut donc égaler 28, 35, 42, 49, …
Chacun de ces nombres est un multiple de 7. RÉPONSE : (B)

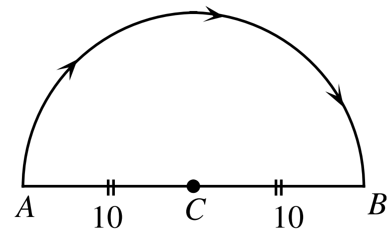
22. Dans le diagramme, on a $AC = CB = 10$ m, AC et CB étant les diamètres des deux petits demi-cercles. Le grand demi-cercle a pour diamètre AB. On peut emprunter plusieurs trajets pour se rendre du point A au point B. Un de ces trajets consiste à parcourir le grand demi-cercle de A à B. Un autre trajet consiste à parcourir le petit demi-cercle de A à C, puis le petit demi-cercle de C à B. La différence entre les longueurs de ces trajets est égale à :



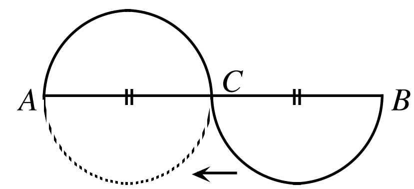
(**A**) 12π (**B**) 6π (**C**) 3π
(**D**) 2π (**E**) 0

Solution
On considère chacun des deux trajets.

Trajet 1
La distance parcourue est égale à la moitié de la circonférence d'un cercle de rayon 10.
Cette distance est égale à : $\frac{1}{2}\left[2\pi(10)\right] = 10\pi$ (à peu près 31,42 m)



Trajet 2
La distance parcourue est égale à la circonférence d'un cercle de rayon 5.
Cette distance est égale à : $2\pi(5) = 10\pi$ (à peu près 31,42 m)



Puisque ces distances sont égales, la différence entre les longueurs de ces trajets est égale à : $10\pi - 10\pi = 0$

RÉPONSE : (E)

23. Carinne écrit tous les entiers de 1 à 1000 dont la somme des chiffres est égale à 4. La fraction de ces nombres qui sont premiers est écrite sous la forme réduite $\frac{a}{b}$. Alors $a + b$ est égal à :

(**A**) 5 (**B**) 4 (**C**) 15 (**D**) 26 (**E**) 19

Solution
Les entiers de 1 à 1000 dont la somme des chiffres est égale à 4 sont : 13, 22, 31, 40, 103, 112, 121, 130, 202, 211, 220, 301, 310, 400.
Les nombres encerclés sont premiers. On peut éliminer tous les nombres pairs et vérifier les autres pour le constater.
Il y a donc 4 des 15 nombres qui sont premiers. Donc $a = 4$ et $b = 15$. Donc $a + b = 19$.

RÉPONSE : (E)

24. Le tableau indique les frais de service de l'institution bancaire de Raymonde. Lors de ses 25 premières opérations, elle fait trois fois plus de débits automatiques que de chèques. De plus, elle a fait autant de chèques que de retraits. Après la vingt-cinquième opération, elle ne fera qu'une sorte d'opération. Quel est le plus petit nombre d'opérations qu'elle doit faire pour que les frais de service dépassent les frais forfaitaires qui sont de 15,95 $?

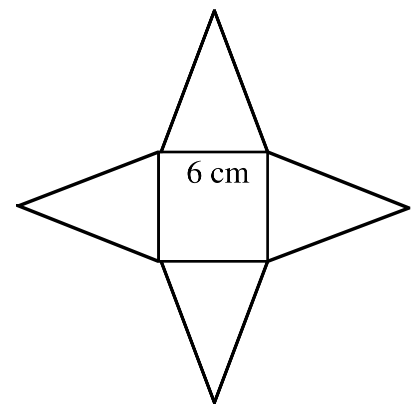
	Frais de service par op ration
Ch que	0,50 $
D bit automatique	0,60 $
Retrait	0,45 $

Frais forfaitaires : 15,95 $

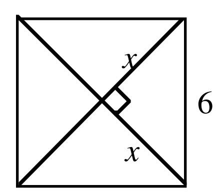
(**A**) 29 (**B**) 30 (**C**) 27 (**D**) 28 (**E**) 31

Solution
Soit d le nombre de débits automatiques, c le nombre de chèques et r le nombre de retraits pendant les 25 premières opérations de Raymonde. On a $d:c:r = 3:1:1$.
Par tâtonnement, on voit qu'il y a eu 15 débits automatiques, 5 chèques et 5 retraits.
Les frais de service s'élèvent donc à : $15 \times 0{,}60 + 5 \times 0{,}50 + 5 \times 0{,}45 = 13{,}75$ \$.
Pour dépasser les frais forfaitaires de 15,95 \$, il faudrait que les frais de services augmentent de plus de 2,20 \$. Pour minimiser le nombre d'opérations, il faudrait que Raymonde fasse quatre débits automatiques.
Le nombre total d'opérations serait alors égal à : $25 + 4 = 29$ RÉPONSE : (A)

25. La figure est formée d'un carré ayant des côtés de 6 cm et de quatre triangles isocèles. On peut replier les triangles de manière à former une pyramide à base carrée. Si la pyramide a une hauteur de 4 cm, l'aire totale du carré et des quatre triangles est égale à :
(**A**) 84 cm^2 (**B**) 98 cm^2 (**C**) 96 cm^2
(**D**) 108 cm^2 (**E**) 90 cm^2



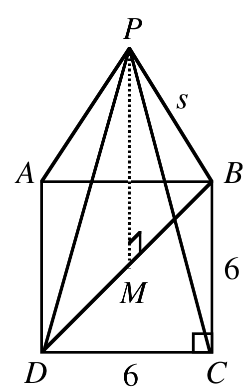
Solution
Le diagramme représente la base de la pyramide.
On calcule la valeur de x au moyen du théorème de Pythagore.



$$x^2 + x^2 = 6^2$$
$$2x^2 = 36$$
$$x^2 = 18$$
$$x = \sqrt{18}$$

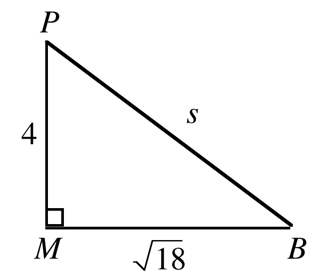
Remarque **:** Nous utilisons ici la valeur exacte $\sqrt{18}$ qui facilite les calculs qui suivront. Il est tout à fait correct d'utiliser une valeur approximative telle que 4,24.

Ce diagramme illustre la pyramide au complet.
On a abaissé une perpendiculaire du sommet P jusqu'au point M sur la base de la pyramide.
Puisque la base est carrée, M est le milieu de la diagonale DB.



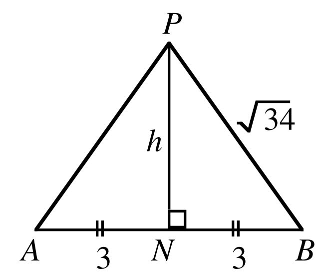
Ce diagramme illustre le triangle rectangle PMB.
D'après le théorème de Pythagore :

$$s^2 = 4^2 + \left(\sqrt{18}\right)^2$$
$$s^2 = 16 + 18$$
$$s^2 = 34$$
$$s = \sqrt{34}$$



Le diagramme suivant représente une face latérale de la pyramide. On abaisse une perpendiculaire du point P au point N sur la base AB. Puisque le triangle est isocèle, N est le milieu de la base. On fait encore appel au théorème de Pythagore.

$$h^2 + 3^2 = \left(\sqrt{34}\right)^2$$
$$h^2 + 9 = 34$$
$$h^2 = 25$$
$$h = 5$$



Chaque triangle de la pyramide a donc une aire égale à : $\dfrac{6 \times 5}{2} = 15$

La base de la pyramide a une aire égale à : $6 \times 6 = 36$

L'aire totale du carré et des quatre triangles est égale à : $36 + 4 \times 15 = 96$

RÉPONSE : (C)