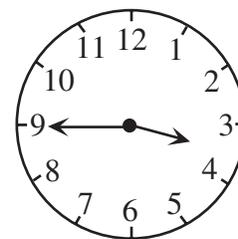


Concours Galois (10^e année - Sec. IV au Québec)

mercredi 16 avril 2003

1. a) La somme des carrés de 5 entiers positifs consécutifs est égale à 1815. Quel est le plus grand de ces entiers?
 b) Démontrer que la somme des carrés de n'importe quels 5 entiers consécutifs est toujours divisible par 5.

2. Le professeur Coucou croit, à tort, que les aiguilles d'une montre, à 3 h 45, forment un angle de 180°.

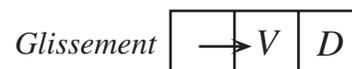


- a) Dans l'intervalle de 3 h à 3 h 45, quelle est la mesure de l'angle balayé par la petite aiguille?
 b) Pour démontrer que le professeur a tort, déterminer la mesure correcte de l'angle entre les aiguilles d'une montre à 3 h 45.
 c) À quelle heure, entre 3 h et 4 h, les aiguilles de la montre formeront-elles un angle de 180°?

3. Dans le jeu de *Commutation*, on doit déplacer des pièces de dix cents (D) et des pièces de vingt-cinq cents (V), de manière que les unes prennent la place des autres. Le diagramme de départ est illustré ci-dessous pour une pièce de dix cents et une pièce de vingt-cinq cents. Voici les mouvements permis :

- i) S'il y a une place vide à côté d'une pièce de monnaie, on peut faire *glisser* la pièce à cet endroit.
 ii) On peut faire *sauter* une pièce de dix cents par dessus une pièce de vingt-cinq cents, ou une pièce de vingt-cinq cents par dessus une pièce de dix cents, s'il y a un espace vide de l'autre côté.

Le diagramme ci-contre montre les trois mouvements nécessaires pour une pièce de chaque sorte.



- a) Compléter le diagramme ci-contre pour montrer comment le jeu de *Commutation*, avec 2 pièces de chaque sorte, peut être joué en 8 mouvements

V	V		D	D
D	D		V	V

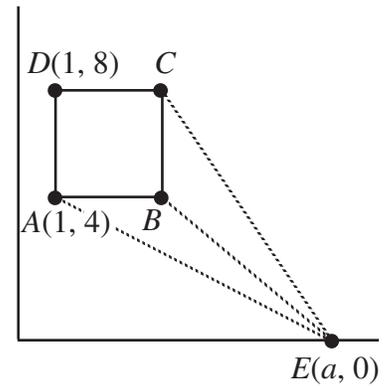
- b) En considérant le nombre de *glissements* et de *sauts*, expliquer pourquoi le jeu exige au moins 15 mouvements si on a 3 pièces de chaque sorte.

à suivre ...

4. Dans le diagramme, $ABCD$ est un carré et les coordonnées de A et de D sont indiquées.

a) Soit le point $E(a, 0)$, sur l'axe des abscisses, de manière que les triangles CBE et ABE soient situés complètement à l'extérieur du carré $ABCD$. Pour quelle valeur de a la somme de l'aire des triangles CBE et ABE est-elle égale à l'aire du carré $ABCD$?

b) Soit le point F , sur la droite qui passe par les points $M(6, -1)$ et $N(12, 2)$, de manière que les triangles CBF et ABF soient situés complètement à l'extérieur du carré $ABCD$. Déterminer les coordonnées du point F si la somme de l'aire des triangles CBF et ABF est égale à l'aire du carré $ABCD$.



Prolongements (Vous devriez essayer de répondre à ces questions uniquement lorsque vous aurez complété au meilleur de vos connaissances les quatre principaux problèmes)

Prolongement du Problème 1

Le nombre 1815 est aussi la somme de 5 entiers positifs consécutifs. Déterminer le prochain nombre, plus grand que 1815, qui est à la fois la somme de cinq entiers positifs consécutifs et la somme des carrés de 5 entiers consécutifs.

Prolongement du Problème 2

On pourrait croire que les aiguilles d'une montre forment un angle de 90° 24 fois pendant une période de 12 heures. Or ce n'est pas le cas. Déterminer le bon nombre de fois que les aiguilles forment un angle de 90° pendant une période de 12 heures.

Prolongement du Problème 3

Expliquer pourquoi le jeu exige au moins $n(n+2)$ mouvements si on a n pièces de chaque sorte.

Prolongement du Problème 4

Déterminer l'ensemble de tous les points $P(x, y)$ tels que les triangles CBP et ABP soient situés complètement à l'extérieur du carré $ABCD$ et que la somme de l'aire des triangles CBP et ABP soit égale à l'aire du carré $ABCD$.