Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2003 Solutions

Concours Gauss

(7^e et 8^e années – Sec. I et II au Québec)

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche
Comptables agréés

Avec la participation de :

Institut canadien des actuaires

Great West Life and London Life

Sybase Inc. (Waterloo)

*i*Anywhere Solutions

Avec l'appui de :

Financière Manuvie

Comité exécutif	Barry Ferguson (Directeur), Peter Crippin, Ruth Malinowski, Ian VanderBurgh
Ordinatique	Steve Breen, University of Waterloo Don Cowan, University of Waterloo Matthew Oliver, University of Waterloo
Compilateurs du rapport du Concours Gauss	Lloyd Auckland, University of Waterloo Barry Ferguson, University of Waterloo
Documentation	Bonnie Findlay, University of Waterloo
Publications	Bonnie Findlay, University of Waterloo
Version française	André Ladouceur, Collège catholique Samuel-Genest, Ottawa Robert Laliberté, École secondaire publique Louis-Riel Gérard Proulx, Collège catholique Franco-Ouest, Ottawa Rodrigue St-Jean, École secondaire Embrun, Embrun
Adjoints à la technique	Joanne Kursikowski, Linda Schmidt, Kim Schnarr
Comité de validation	Ed Anderson, University of Waterloo, Waterloo John Barsby, St. John's-Ravenscourt School, Winnipeg Jean Collins, (retired), Thornhill Tom Griffiths (retired), London Frank Rachich (retired), Woodstock Larry Rice, University of Waterloo, Waterloo Ron Scoins, University of Waterloo, Waterloo

Comité Gauss — Solutions Gauss 2003

Mark Bredin (Assoc. Chair)
St. John's-Ravenscourt School
Winnipeg, Manitoba

Richard Auckland
New Sarum Public School
St. Thomas, Ontario

Sandy Emms Jones
Forest Heights C.I.
Kitchener, Ontario

Kevin Grady
Cobden Dist. Public School
Cobden, Ontario

Joanne Halpern
Toronto, Ontario

David Matthews
University of Waterloo
Waterloo, Ontario

John Grant McLoughlin
Memorial University of Newfoundland
St. John's, Newfoundland

Bob McRoberts (Chair)
Dr. G.W. Williams S.S.
Aurora, ON

Paul Ottaway
Halifax, Nova Scotia

Patricia Tinholt
Valley Park Middle School
Don Mills, Ontario

Sue Trew
Holy Name of Mary S.S.
Mississauga, Ontario

Partie A

1. On obtient $3{,}26 \times 1{,}5 = 4{,}89$. Réponse : (B)

2. Selon la priorité des opérations, on a : $(9-2)-(4-1) = 7-3$
$= 4$ Réponse : (C)

3. On obtient $30 + 80\,000 + 700 + 60 = 80\,790$. Réponse : (D)

4. $\dfrac{1+2+3}{4+5+6} = \dfrac{6}{15}$, ou $\dfrac{2}{5}$ Réponse : (C)

5. On a posé la question à 90 personnes.
Selon le diagramme, 25 personnes ont choisi le chat, 10 ont choisi le poisson, 15 ont choisi un oiseau et 5 ont répondu « autre ». Cela fait $25+10+15+5$, ou 55 personnes.
Il reste donc $90-55$, ou 35 personnes qui ont choisi le chien. Réponse : (E)

6. Puisque Thomas utilise 4 mL de gel par jour et qu'un tube de gel contient 128 mL de gel, il lui faudra $\dfrac{128}{4}$, ou 32 jours pour vider le tube. Réponse : (A)

7. *Solution 1*

Si on annule les 3 dans le membre de gauche, l'égalité $\dfrac{3\times 6\times 9}{3} = \dfrac{\square}{2}$ devient $6\times 9 = \dfrac{\square}{2}$.

L'expression dans la case doit donc être égale à $2\times 6\times 9$, car $6\times 9 = \dfrac{2\times 6\times 9}{2}$.

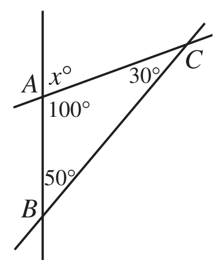
Solution 2

On évalue le membre de gauche, $\dfrac{3\times 6\times 9}{3}$, qui est égal à 54.
Le nombre dans la case doit donc être égal à 54×2, ou 108, pour que l'égalité soit vraie.
On évalue les expressions des cinq choix de réponses pour obtenir :
(A) 48 (B) 72 (C) 108 (D) 64 (E) 432
L'expression qu'on peut placer dans la case est donc $2\times 6\times 9$. Réponse : (C)

8. Si on tourne les mots SOLDE GÉANT, comme si on les regardait de l'autre côté de la vitrine, on obtient TNAƎ̀G ƎDJOƧ.
Les seules lettres qui sont pareilles, lorsqu'on les regarde d'un côté ou de l'autre de la vitrine, sont O, A et T. RÉPONSE : (A)

9. Au départ, Paul est à une distance de 1000 m de la maison et il se rend à un point situé à 800 m de la maison. Il parcourt donc une distance de 200 m. Le graphique indique qu'il revient sur ses pas, puisqu'il se rend à un point situé à 1000 m de la maison. Ce faisant, il parcourt de nouveau une distance de 200 m. Il se rend ensuite à la maison, en parcourant une distance de 1000 m. Paul parcourt donc une distance totale de $200 + 200 + 1000$, ou 1400 m. RÉPONSE : (E)

10. Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, alors $\angle BAC = 180^\circ - 30^\circ - 50^\circ$, ou $\angle BAC = 100^\circ$.
Puisqu'une droite forme un angle plat au point A, alors $x^\circ + 100^\circ = 180^\circ$, d'où $x = 80$.



RÉPONSE : (A)

Partie B

11. Puisque $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ est égal à $\frac{1}{3}$, on enlève $\frac{1}{3}$ des 12 carrés, soit 4 carrés.
Il restera donc 8 carrés. RÉPONSE : (D)

12. *Solution 1*
Puisque le périmètre du champ est 3 fois sa longueur et que le périmètre mesure 240 m, le champ a une longueur de 80 m.
Pour calculer le périmètre, il faut additionner deux fois la longueur et deux fois la largeur. La longueur contribue donc 160 m au périmètre, ce qui laisse 80 m pour deux fois la largeur. Le champ a donc une largeur de 40 m.

Solution 2
Soit P le périmètre du champ, L sa longueur et l sa largeur.
On sait que $P = 3L$ et que $P = 240$. Donc $L = \frac{1}{3}(240)$, ou $L = 80$.
Puisque $P = 240$ et que $P = 2L + 2l$, alors $240 = 2(80) + 2l$, d'où $l = 40$.
RÉPONSE : (B)

13. Si Louis court à $\frac{1}{2}$ de sa vitesse habituelle, il court à 5 km/h et il mettra 6 h pour compléter la course de 30 km.
Si Éliane court à $1\frac{1}{2}$ fois sa vitesse habituelle, elle court à 15 km/h et elle mettra 2 h pour compléter la course de 30 km.
Louis met donc 4 h de plus qu'Éliane pour compléter la course.

Réponse : (D)

14. *Solution 1*
Puisqu'il y a deux fois plus de disques rouges que de disques verts et deux fois moins de disques bleus que de disques verts, alors il y a quatre fois plus de disques rouges que de disques bleus.
Pour chaque deux disques verts, il y a donc quatre disques rouges et un disque bleu. On peut donc imaginer que les disques sont en groupes de sept.
Puisqu'il y a 14 disques en tout, il y a deux groupes de sept. Il y a donc huit disques rouges, quatre disques verts et deux disques bleus.

Solution 2
Soit v le nombre de disques verts.
Le nombre de disques rouges est égal à $2v$ et le nombre de disques bleus est égal à $\frac{1}{2}v$.
On a donc :

$$\begin{aligned} 2v + v + \frac{1}{2}v &= 14 \\ 4v + 2v + v &= 28 \\ 7v &= 28 \\ v &= 4 \end{aligned}$$

Il y a donc quatre disques verts.

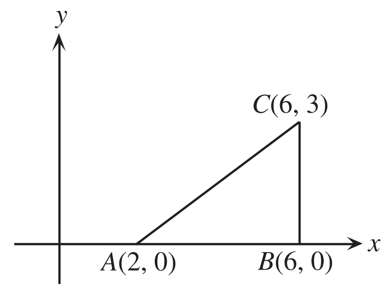
Réponse : (B)

15. Il y a 180 comprimés en tout dans la bouteille.
Parmi les 60 comprimés de forme étoilée, il y a des quantités égales qui goûtent la fraise, le bleuet ou l'orange. Il y a donc 20 comprimés de forme étoilée qui goûtent le bleuet.
Puisqu'il y a une chance égale de choisir n'importe quel comprimé, la probabilité de choisir un comprimé de forme étoilée au goût de bleuet est égale à :

$$\frac{\text{Nombre de comprimés étoilés au bleuet}}{\text{Nombre total de comprimés}} = \frac{20}{180}, \text{ ou } \frac{1}{9}.$$

Réponse : (A)

16. On commence par esquisser le triangle.
Puisque le point C est directement au-dessus du point B, l'angle ABC est droit. Le triangle ABC a donc une base AB de longueur 4 et une hauteur BC de longueur 3.
L'aire du triangle est égale à $A = \frac{b \times h}{2}$. Elle est donc égale à
$A = \frac{4 \times 3}{2}$, ou 6 unités carrées.

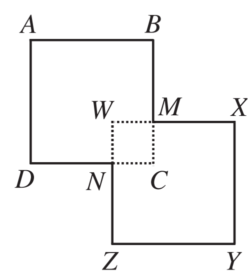


RÉPONSE : (C)

17. Puisque la facture était de 74,16 \$ et qu'il y avait un coût initial de 45 \$, le coût associé à la distance parcourue est égal à $74{,}16\ \$ - 45\ \$$, ou 29,16 \$. Puisque le taux associé à la distance est égal à 0,12 \$ le kilomètre, le nombre de kilomètres parcourus est égal à $\frac{29{,}16}{0{,}12}$, ou 243. RÉPONSE : (C)

18. *Solution 1*
Comme on le voit dans le diagramme, le périmètre de la figure ombrée est égal à la somme des périmètres des deux grands carrés, moins le périmètre du petit carré.
Puisque les grands carrés ont des côtés de 5 cm, ils ont chacun un périmètre de 20 cm.
Puisque le petit carré a une aire de $4\ \text{cm}^2$, il a des côtés de 2 cm et un périmètre de 8 cm.
Le périmètre de la figure ombrée est donc égal à $20 + 20 - 8$, ou 32 cm.

Solution 2
On nomme les sommets et on calcule la longueur de chaque côté.
Puisque les grands carrés ont des côtés de 5 cm, alors
$AB = AD = YX = YZ = 5$.
Le petit carré a une aire de $4\ \text{cm}^2$. Ses côtés mesurent donc 2 cm.
Donc $WM = MC = CN = NW = 2$. Donc BM, DN, MX et NZ ont chacun une longueur de 3 cm (la différence entre les côtés de 5 cm et ceux de 2 cm).
Le périmètre de la figure ombrée est égal à $4 \times 5 + 4 \times 3$, ou 32 cm.

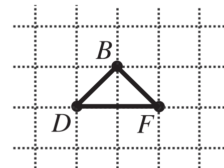


RÉPONSE : (B)

19. L'examen d'Abel comportait 80 questions. Puisqu'il a obtenu une note de 80 %, il a répondu correctement à 80 % des 80 questions, c'est-à-dire à $\frac{80}{100} \times 80$, ou 64 questions.
Abel a réussi 70 % des 30 questions portant sur l'algèbre, c'est-à-dire à $\frac{70}{100} \times 30$, ou 21 questions.
Il a donc réussi $64 - 21$, ou 43 questions portant sur la géométrie.

RÉPONSE : (A)

20. On écrit d'abord tous les triangles qui ont une base sur *DEF* (c'est-à-dire avec un côté *DE*, *DF* ou *EF*) : *DAE*, *DBE*, *DCE*, *DAF*, *DBF*, *DCF*, *EAF*, *EBF*, *ECF*
Or les triangles *DAE*, *DBE*, *DAF*, *DCF*, *EBF* et *ECF* sont évidemment rectangles, tandis que les triangles *DCE* et *EAF* ne le sont pas, car ils ont chacun un angle de 135°.
Qu'en est-il du triangle *DBF*?
Le triangle *DBF* est rectangle, car $\angle DBE = \angle EBF = 45^\circ$, d'où $\angle DBF = 90^\circ$.
Dans la liste ci-dessus, il y a deux triangles non rectangles.



Si on construit tous les triangles qui ont une base sur *ABC*, on trouvera aussi deux triangles non rectangles. (On peut le vérifier en faisant subir une réflexion aux triangles de la première liste, par rapport à un axe de réflexion horizontal, à mi-chemin entre *DEF* et *ABC*.)
On remarque qu'il est impossible de construire un triangle qui n'a pas un côté sur *ABC* ou sur *DEF*, puisque les seuls autres côtés sont *AD*, *AE, AF*, *BD*, *BE*, *BF*, *CD*, *CE* et *CF* et il est impossible de former un triangle avec n'importe quels trois de ces côtés, chaque côté ayant une extrémité à *A*, *B* ou *C* et l'autre extrémité à *D*, *E* ou *F*.
On peut former quatre triangles qui ne sont pas rectangles. RÉPONSE : (E)

Partie C

21. Puisque dix personnes attendent pour subir une intervention et que les interventions sont prévues à intervalles de 15 minutes, la première commencera à 8 h et la dixième commencera après neuf intervalles de 15 minutes.
Or neuf intervalles de 15 minutes correspondent à 135 minutes, ou 2 heures et 15 minutes.
La dixième intervention commencera donc à 10 h 15 et se terminera à 11 h.
RÉPONSE : (D)

22. *Solution 1*
Puisque Line a gagné 95 % des 20 parties qu'elle a joueés, elle a gagné $\frac{95}{100} \times 20$, ou 19 parties. On peut aussi dire qu'elle a gagné $\frac{19}{20}$ des parties jouées. Or 96 %, exprimé sous forme fractionnaire, est égal à $\frac{96}{100}$, ou $\frac{24}{25}$. Si on compare les rapports $\frac{19}{20}$ et $\frac{24}{25}$, on voit que Line doit gagner les 5 parties suivantes $\left(\frac{19+5}{20+5} = \frac{24}{25}\right)$ pour qu'elle ait gagné 24 des 25 parties jouées, ou 96 % des parties jouées.

Solution 2

Puisque Line a gagné 95 % des 20 parties qu'elle a jouées, elle a gagné $\frac{95}{100} \times 20$, ou 19 parties.

Soit x le nombre de parties consécutives qu'elle doit gagner pour obtenir un pourcentage de parties gagnées égal à 96 %. Le rapport du nombre de parties gagnées au nombre de parties jouées, après ces x parties, est égal à : $\dfrac{\text{Nombre de parties gagnées}}{\text{Nombre de parties jouées}} = \dfrac{19+x}{20+x}$.

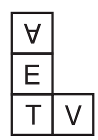
On a donc $\dfrac{19+x}{20+x} = \dfrac{96}{100}$, ou $\dfrac{19+x}{20+x} = \dfrac{24}{25}$.

Par observation ou par tâtonnements, on obtient $x = 5$.

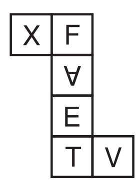
Line doit donc gagner les cinq parties suivantes. RÉPONSE : (D)

23. On déplie le cube, c'est-à-dire qu'on fait son développement.
La première position du cube donne le développement suivant :

La troisième position du cube nous permet d'ajouter le A au-dessus du E.



La deuxième position du cube nous permet d'ajouter le F au-dessus du A et le X à la gauche du F.
On obtient le développement suivant :



Si on replie ce cube, en plaçant le A en avant, le F au-dessus et le E en dessous, il y aura un V renversé sur la face à droite et la lettre sur la face ombrée est donc un V. RÉPONSE : (E)

24. Pour mieux comprendre la régularité, on la récrit, à droite, en montrant comment les nombres ont été obtenus :

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 1 \quad 3 \quad 2 \\ 1 \quad 4 \quad 5 \quad 2 \\ 1 \quad 5 \quad 9 \quad 7 \quad 2 \\ \begin{array}{ccc} \therefore\! & \vdots & \ddots \end{array} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 1 \quad 1+2 \quad 2 \\ 1 \quad 1+3 \quad 3+2 \quad 2 \\ 1 \quad 1+4 \quad 4+5 \quad 5+2 \quad 2 \\ \begin{array}{ccc} \therefore\! & \vdots & \ddots \end{array} \end{array}$$

En examinant la régularité à droite, on s'aperçoit que chaque nombre d'un ligne paraît *deux fois* dans la ligne suivante. (Chaque nombre à l'extrémité d'une ligne, soit 1 ou 2, paraît seul et paraît une fois dans une addition dans la ligne suivante. Les autres nombres d'une ligne paraissent deux fois dans des additions de la ligne suivante.)

Donc la somme des nombres d'une ligne doit être égale à deux fois la somme des nombres de la ligne précédente.
On peut le vérifier :

Somme des nombres de la 1re ligne :	3
Somme des nombres de la 2e ligne :	6
Somme des nombres de la 3e ligne :	12
Somme des nombres de la 4e ligne :	24

Pour obtenir la somme des nombres de la 13e ligne, on doit donc calculer la somme des nombres de la 1re ligne et la multiplier par 2 douze fois. Cela donnera 3×2^{12}, c'est-à-dire 3×4096, ou $12\,288$.

Réponse : (D)

25. Dans la solution qui suit, on examine chaque possibilité. On peut aussi obtenir une solution plus rapidement par tâtonnements.

On écrit la multiplication en remplaçant les cases par des lettres :

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ & \times & C \\ \hline D & E & F \end{array}$$

On veut ensuite remplacer les lettres *A*, *B*, *C*, *D*, *E* et *F* par les chiffres de 1 à 6.

C peut-il être égal à 1?
Si *C* est égal à 1, il faut que *B* et *F* représentent le même chiffre, ce qui est interdit, car chaque chiffre doit être utilisé une seule fois. Donc *C* n'est pas égal à 1.

C peut-il être égal à 5?
Si *C* est égal à 5 et si *B* est impair, *F* doit lui aussi être égal à 5, ce qui est interdit. Si *C* est égal à 5 et si *B* est pair, alors *F* doit être égal à 0, ce qui est interdit. Donc *C* n'est pas égal à 5.

C peut-il être égal à 6?
Si *C* est égal à 6, on examine les valeurs possibles de *B* et les valeurs correspondantes de *F* :

B	*F*	
1	6	Interdit car il y a deux 6.
2	2	Interdit car il y a deux 2.
3	8	Interdit car il ne peut y avoir un 8.
4	4	Interdit car il y a deux 4.
5	0	Interdit car il ne peut y avoir un 0.

Puisque tous ces résultats sont interdits, *C* n'est pas égal à 6.

C peut-il être égal à 4?
Si *C* est égal à 4, on utilise un tableau semblable au précédent pour démontrer que *B* doit être égal à 3 et que *F* doit être égal à 2. On y reviendra plus loin.

C peut-il être égal à 3?

Si C est égal à 3, on utilise un tableau semblable au précédent pour démontrer que B doit être égal à 2 ou à 4 et que F doit alors être égal à 6 ou à 2. On y reviendra.

C peut-il être égal à 2?

Si C est égal à 2, on utilise un tableau semblable au précédent pour démontrer que B doit être égal à 3 et que F doit alors être égal à 6. Dans ce cas, on a :

$$\begin{array}{rrr} & A & 3 \\ & \times & 2 \\ \hline D & E & 6 \end{array}$$

Puisque le produit $DE6$ est formé de trois chiffres et que A doit égaler 1, 4 ou 5, il faut que A soit égal à 5. On obtient alors le produit $53 \times 2 = 106$ qui est interdit, car il ne peut y avoir un 0.
On revient au cas où C est peut-être égal à 4. On a vu que B doit alors égaler 3 et que F doit égaler 2. A doit alors égaler 1, 5, ou 6, et chaque possibilité aboutit à une résultat interdit.

On conclut que C doit être égal à 3, puisque c'est le seul cas qui reste. Il faut tout de même vérifier que la multiplication est possible.
En utilisant le même argument que ci-haut, on obtient $54 \times 3 = 162$. Donc $C = 3$. Réponse : (B)