



Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat (11^e année – Sec. V)

le jeudi 25 février 2010



LA PARFAITE ALLIANCE COMMUNAUTAIRE^{MC}

Deloitte.



Durée : 60 minutes ©2009 Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur gauche de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié sur notre site web à <http://www.cemc.uwaterloo.ca>.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$?

- (A) 2 (B) $\frac{5}{13}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) 1 (E) $\frac{13}{6}$

2. La quantité « 2 % de 1 » est égale à :

- (A) $\frac{2}{100}$ (B) $\frac{2}{10}$ (C) 2 (D) 20 (E) 200

3. Dans la figure ci-contre, les points P , Q , R et S sont placés dans l'ordre sur un segment de droite. Sachant que $PQ = 1$, $QR = 2PQ$ et $RS = 3QR$, quelle est la longueur du segment PS ?



- (A) 7 (B) 6 (C) 9
(D) 8 (E) 10

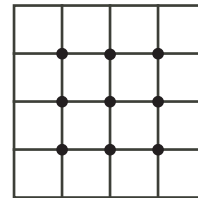
4. Si $u = -6$ et $x = \frac{1}{3}(3 - 4u)$, alors x est égal à :

- (A) -23 (B) -7 (C) 9 (D) 2 (E) 25

5. Si $2^x = 16$, alors 2^{x+3} est égal à :

- (A) 19 (B) 48 (C) 22 (D) 128 (E) 2048

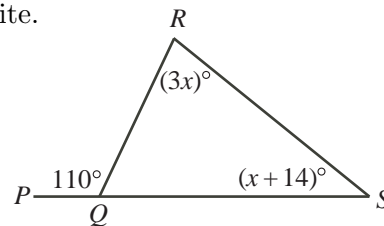
6. Dans le quadrillage 4 sur 4 ci-contre, les neuf points d'intersection intérieurs sont indiqués en gras. Combien y a-t-il de points d'intersection intérieurs sur un quadrillage 12 sur 12 ?



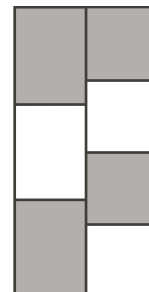
- (A) 100 (B) 121 (C) 132
(D) 144 (E) 169

7. Dans la figure ci-contre, PQS est un segment de droite. Quelle est la valeur de x ?

- (A) 19 (B) 62 (C) 21.5
(D) 24 (E) 32



8. Un rectangle est divisé en deux bandes verticales de même largeur. La bande de gauche est divisée en trois parties égales et la bande de droite est divisée en quatre parties égales. Des parties du rectangle sont ensuite ombrées comme dans la figure ci-contre. Quelle fraction du rectangle initial est ombrée ?

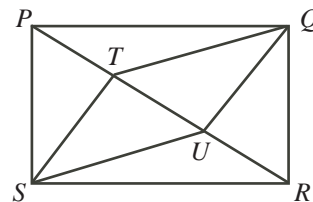


- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$
(D) $\frac{7}{6}$ (E) $\frac{7}{12}$

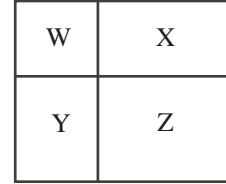
9. La valeur de l'expression $k\nabla m$ est définie comme étant $k(k - m)$. Par exemple, $7\nabla 2 = 7(7 - 2) = 35$. Quelle est la valeur de $(5\nabla 1) + (4\nabla 1)$?
 (A) 9 (B) 84 (C) 20 (D) 32 (E) 72
10. Si $2x^2 = 9x - 4$ et $x \neq 4$, quelle est la valeur de $2x$?
 (A) 4 (B) 1 (C) -1 (D) 0 (E) 2

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Une pièce de 1 \$ a la même masse que 4 pièces de 10 ¢. Un sac rempli de pièces de 10 ¢ a la même masse qu'un autre sac contenant des pièces de 1 \$. Les pièces de 1 \$, dans ce sac, ont une valeur totale de 400 \$. Quelle est la valeur totale des pièces de 10 ¢ dans le premier sac ?
 (A) 40 \$ (B) 100 \$ (C) 160 \$ (D) 1000 \$ (E) 1600 \$
12. Lorsqu'on a distribué k bonbons à sept personnes de manière que chaque personne a reçu le même nombre de bonbons et que chaque personne a reçu autant de bonbons que possible, il est resté 3 bonbons. Si, à la place, on distribuait $3k$ bonbons de la même manière à sept personnes, combien resterait-il de bonbons à la fin ?
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) 9
13. Cinquante nombres ont une moyenne de 76. Quarante de ces nombres ont une moyenne de 80. Quelle est la moyenne des dix autres nombres ?
 (A) 60 (B) 4 (C) 72 (D) 40 (E) 78
14. Quatre amis sont allés à la pêche et ils ont attrapé un total de 11 poissons. Chaque personne a attrapé au moins un poisson. Chacun des énoncés suivants *pourrait* être vrai. Lequel des énoncés *doit* être vrai ?
 (A) Au moins une personne a attrapé exactement un poisson.
 (B) Au moins une personne a attrapé exactement trois poissons.
 (C) Au moins une personne a attrapé plus de trois poissons.
 (D) Au moins une personne a attrapé moins de trois poissons.
 (E) Au moins deux personnes ont chacun attrapé plus d'un poisson.
15. Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs p pour lesquels $-1 < \sqrt{p} - \sqrt{100} < 1$?
 (A) 19 (B) 21 (C) 38 (D) 39 (E) 41
16. Des entiers positifs a et b vérifient l'équation $ab = 2010$. Si $a > b$, quelle est la plus petite valeur possible de $a - b$?
 (A) 37 (B) 119 (C) 191 (D) 1 (E) 397
17. Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un rectangle, $PQ = 5$ et $QR = 3$. Les points T et U divisent le segment PR en trois segments de même longueur. Quelle est l'aire du quadrilatère $STQU$?
 (A) $\frac{17}{3}$ (B) 5 (C) $\frac{5}{2}$
 (D) $\frac{\sqrt{34}}{3}$ (E) $\sqrt{34}$

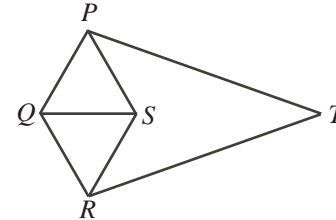


18. Dans la figure ci-contre, un rectangle a été divisé en quatre petits rectangles nommés W, X, Y et Z. Les rectangles W, X et Y ont un périmètre respectif de 2, 3 et 5. Quel est le périmètre du rectangle Z ?



- (A) 6 (B) 7 (C) 4
(D) 8 (E) 7.5

19. Dans la figure ci-contre, $PQ = QR = RS = SP = SQ = 6$ et $PT = RT = 14$. Quelle est la longueur de ST ?



- (A) $4\sqrt{10} - 3$ (B) 11 (C) $7\sqrt{3} - 3$
(D) 10 (E) $\sqrt{232 - 84\sqrt{3}}$

20. Un carré a des côtés de longueur 5. À combien d'endroits peut-on placer un point X de manière que les distances du point X aux quatre côtés du carré soient égales à 1, 2, 3 et 4 ?

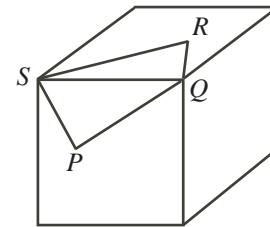
- (A) 0 (B) 12 (C) 4 (D) 8 (E) 16

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Si $\frac{x-y}{z-y} = -10$, quelle est la valeur de $\frac{x-z}{y-z}$?

- (A) 11 (B) -10 (C) 9 (D) -9 (E) 10

22. Une feuille de papier $PQRS$, de forme rectangulaire, est telle que $PQ = 20$ et $QR = 15$. La feuille est collée à plat sur la surface d'un grand cube de manière que Q et S soient sur les sommets du cube. (Dans la figure ci-contre, les triangles QPS et QRS sont collés sur le devant et le dessus du cube, respectivement.) La distance la plus courte de P à R , mesurée à travers le cube, est plus près de :



- (A) 17,0 (B) 25,0 (C) 31,0
(D) 17,7 (E) 18,4

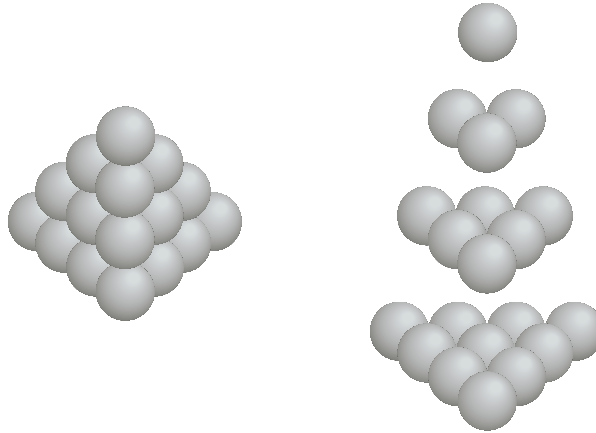
23. Soit t_n l'entier le plus près de \sqrt{n} .

Par exemple, $t_1 = t_2 = 1$ puisque $\sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{2} \approx 1,41$; $t_3 = 2$ puisque $\sqrt{3} \approx 1,73$.

La somme $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} + \dots + \frac{1}{t_{2008}} + \frac{1}{t_{2009}} + \frac{1}{t_{2010}}$ est égale à :

- (A) $88\frac{1}{6}$ (B) $88\frac{1}{2}$ (C) $88\frac{2}{3}$ (D) $88\frac{1}{3}$ (E) 90

24. On peut utiliser des sphères pour construire une structure en forme de tétraèdre dans laquelle les sphères forment des couches triangulaires. Chaque sphère touche aux trois sphères au-dessous d'elle. La première figure montre un tétraèdre de quatre couches et la deuxième montre les couches. Une *sphère interne*, dans le tétraèdre, est une sphère qui touche exactement aux trois sphères dans la couche au-dessus d'elle. Par exemple, il y a une sphère interne dans la quatrième couche, mais il n'y en a aucune dans les trois premières couches.



On forme un tétraèdre de treize couches dans laquelle chaque sphère porte un numéro. La sphère du dessus porte le numéro 1. Chaque autre sphère porte un numéro qui est la somme des numéros des sphères auxquelles elle touche dans la couche au-dessus d'elle. Quelle est la somme des numéros sur les sphères internes dans ce tétraèdre de treize couches ?

- (A) 772 588 (B) 772 566 (C) 772 156 (D) 772 538 (E) 772 626
25. Alexa a choisi des entiers strictement positifs a, b, c, d, e et f , puis elle a développé et simplifié le produit de polynômes suivant.

$$(1 - x)^a(1 + x)^b(1 - x + x^2)^c(1 + x^2)^d(1 + x + x^2)^e(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^f$$

Elle a ensuite enlevé tous les termes dont le x était affecté d'un exposant supérieur à 6 et elle a été surprise de constater qu'il ne restait que $1 - 2x$. Si $a > d + e + f$, $b > c + d$ et $e > c$, quelle est la valeur de a qu'elle a choisie ?

- (A) 17 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 23



Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE



Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2010!
En 2009, plus de 84 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Pascal, Cayley et Fermat.

Allez voir sur Facebook le groupe du CEMI « Who is The Mathiest? ».

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu le 9 avril 2010.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour :

- plus d'information à propos du concours Hypatie;
- des copies gratuites des concours précédents;
- des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs;
- de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours;

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu le 9 avril 2010;
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants;
- trouver les résultats de votre école.

