



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley

(10^e année – Sec. IV)

le jeudi 21 février 2013

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 22 février 2013

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF
WATERLOO

WATERLOO
MATHEMATICS

Deloitte.

Durée : 60 minutes

©2012 University of Waterloo

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

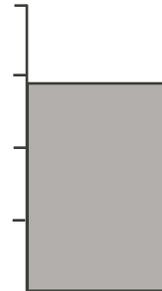
Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

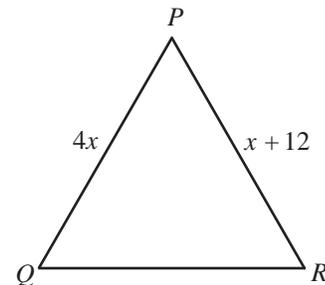
1. Quelle est la valeur de $\frac{8+4}{8-4}$?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6
2. Quelle est la valeur de l'expression $2^3 + 2^2 + 2^1$?
(A) 6 (B) 10 (C) 14 (D) 18 (E) 22
3. Sachant que $x + \sqrt{81} = 25$, quelle est la valeur de x ?
(A) 16 (B) 56 (C) 9 (D) 35 (E) 4
4. Combien des quatre entiers 222, 2222, 22 222, et 222 222 sont des multiples de 3?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
5. Un champ de forme rectangulaire a une longueur de 20 mètres et une largeur de 5 mètres. Si la longueur est augmentée de 10 m, de combien de mètres carrés l'aire est-elle augmentée?
(A) 10 (B) 20 (C) 50 (D) 75 (E) 100

6. Le grand cylindre dans la figure ci-contre contient du lait au chocolat. Il peut contenir jusqu'à 50 L lorsqu'il est plein. Les coches indiquent la division du cylindre en quatre parties de même volume. Parmi les réponses suivantes, laquelle est la meilleure approximation du volume de lait au chocolat contenu présentement dans le cylindre?



- (A) 24 L (B) 28 L (C) 30 L
(D) 36 L (E) 40 L

7. Dans la figure ci-contre, le triangle PQR est équilatéral. Sachant que $PQ = 4x$ et $PR = x + 12$, quelle est la valeur de x ?



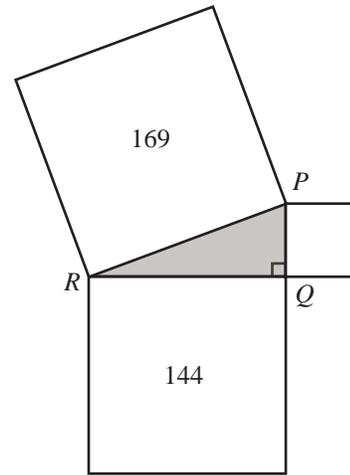
- (A) 48 (B) 16 (C) 4
(D) 32 (E) 12

8. L'opération \diamond est définie par $a \diamond b = \frac{a+b}{a \times b}$. Par exemple, $2 \diamond 5 = \frac{2+5}{2 \times 5}$, d'où $2 \diamond 5 = \frac{7}{10}$.
Quelle est la valeur de $3 \diamond 6$?

- (A) 9 (B) $\frac{1}{18}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 2 (E) $\frac{1}{2}$

9. Dans la figure ci-contre, le triangle PQR est rectangle en Q . On a tracé un carré sur chacun de ses côtés. Le carré sur le côté QR a une aire de 144. Le carré sur le côté PR a une aire de 169. Quelle est l'aire du carré sur le côté PQ ?

- (A) 16 (B) 12 (C) 13
(D) 36 (E) 25



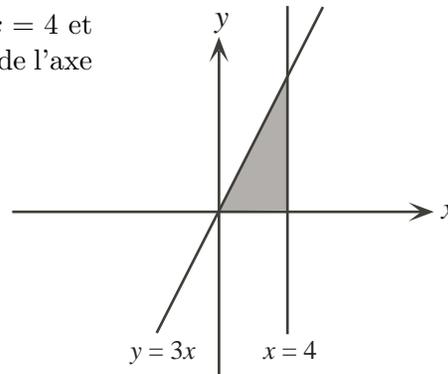
10. Bruno a trois soeurs. Ces trois soeurs ont une moyenne d'âge de 27 ans. Bruno et ses trois soeurs ont une moyenne d'âge de 28 ans. Quel âge Bruno a-t-il, en années ?

- (A) 1 (B) 30 (C) 4 (D) 29 (E) 31

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Dans la figure ci-contre, les droites d'équations $x = 4$ et $y = 3x$ forment un triangle avec la partie positive de l'axe des abscisses. Quelle est l'aire du triangle ?

- (A) 12 (B) 24 (C) 36
(D) 48 (E) 60



12. Sachant que $a(x + b) = 3x + 12$ pour toutes les valeurs de x , quelle est la valeur de $a + b$?

- (A) 12 (B) 15 (C) 8 (D) 7 (E) 13

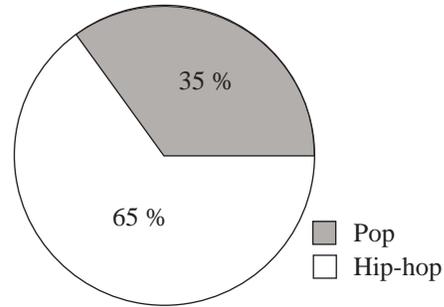
13. On choisit un entier x de manière que la valeur de l'expression $3x + 1$ soit un entier pair. Laquelle des expressions suivantes doit alors représenter un entier impair ?

- (A) $x + 3$ (B) $x - 3$ (C) $2x$ (D) $7x + 4$ (E) $5x + 3$

14. On forme des entiers supérieurs à 1000 en utilisant les chiffres 2, 0, 1 et 3 une fois chacun dans chaque entier. Quelle est la différence entre le plus grand entier et le plus petit entier que l'on puisse former de cette façon ?

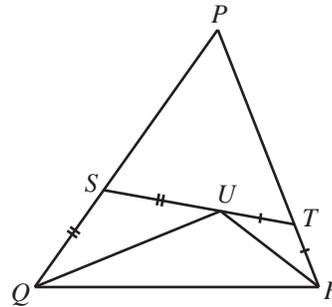
- (A) 2187 (B) 2333 (C) 1980 (D) 3209 (E) 4233

15. Le diagramme ci-contre représente les styles de musique sur une liste de lecture. On ajoute des chansons country à la liste jusqu'à ce que 40 % des chansons sur la liste de lecture soient de style country. Si le rapport du nombre de chansons hip-hop au nombre de chansons pop reste le même, le nombre de chansons hip-hop occupe maintenant quel pourcentage du nombre total de chansons ?



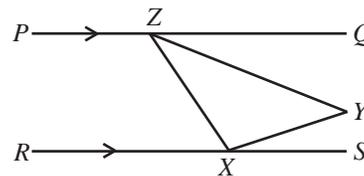
- (A) 7 (B) 15 (C) 21
(D) 35 (E) 39
16. Lorsqu'on évalue l'expression $5^{35} - 6^{21}$, quel est le chiffre des unités de la réponse ?
- (A) 1 (B) 9 (C) 2 (D) 5 (E) 6

17. Dans la figure ci-contre, on a $PQ = 19$, $QR = 18$ et $PR = 17$. Le point S est situé sur PQ , le point T est situé sur PR et le point U est situé sur ST de manière que $QS = SU$ et $UT = TR$. Quel est le périmètre du triangle PST ?



- (A) 36 (B) 35 (C) 37
(D) 34 (E) 38
18. Lorsqu'on divise le nombre 109 par un entier positif x de deux chiffres, on obtient un reste de 4. Quelle est la somme de toutes les valeurs possibles de x , sachant que x est un entier positif de deux chiffres ?

- (A) 36 (B) 56 (C) 50 (D) 71 (E) 35
19. Dans la figure ci-contre, PQ est parallèle à RS . De plus, le point Z est situé sur PQ et le point X est situé sur RS . Si le point Y est situé entre PQ et RS de manière que $\angle YXS = 20^\circ$ et $\angle ZYX = 50^\circ$, quelle est la mesure de l'angle QZY ?



- (A) 30° (B) 20° (C) 40°
(D) 50° (E) 60°
20. Luc et Luce s'exercent en parcourant le même chemin. Pendant la première moitié du parcours, Luce fait du jogging à une vitesse de 6 km/h. Pendant le reste du parcours, elle court à une vitesse de 12 km/h. Elle met x heure pour faire le parcours complet. Pendant le premier tiers du parcours, Luc marche à une vitesse de 5 km/h. Pendant le reste du parcours, il court à une vitesse de 15 km/h. Il met y heure pour faire le parcours complet. Laquelle des valeurs suivantes est égale à $\frac{x}{y}$?

- (A) $\frac{9}{8}$ (B) $\frac{7}{5}$ (C) $\frac{15}{16}$ (D) $\frac{9}{16}$ (E) $\frac{10}{9}$

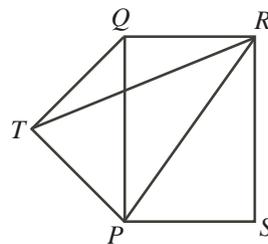
Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Dans l'addition ci-contre, les lettres X , Y et Z représentent chacune un chiffre non nul différent. Quel est le chiffre représenté par X ?

$$\begin{array}{r} X X X \\ Y Y Y \\ + Z Z Z \\ \hline Z Y Y X \end{array}$$

- (A) 1 (B) 2 (C) 7
(D) 8 (E) 9

22. Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un rectangle. Le point T est situé à l'extérieur du rectangle de manière que le triangle PTQ soit isocèle et rectangle avec PQ pour hypoténuse. Sachant que $PQ = 4$ et $QR = 3$, quelle est l'aire du triangle PTR ?

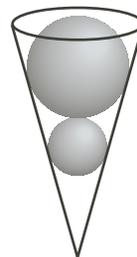


- (A) 5 (B) 6 (C) 7
(D) 8 (E) 9

23. Un sac contient 2 billes rouges et 2 billes bleues. Un deuxième sac contient 2 billes rouges, 2 billes bleues et v billes vertes ($v > 0$). Pour chaque sac, Marie calcule la probabilité d'obtenir deux billes d'une même couleur en tirant au hasard deux billes du même sac, l'une après l'autre, sans remettre la première bille dans le sac. Sachant que ces deux probabilités sont égales, quelle est la valeur de v ?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

24. Un cône est rempli d'eau. On place deux boules sphériques dans le cône, ce qui fait déverser une partie de l'eau hors du cône. (Les boules se touchent l'une l'autre, elles touchent au cône tout autour et le haut de la boule du haut est au même niveau que le haut du cône.) Le rayon de la grande boule est deux fois le rayon de la petite boule. Sachant que le volume de l'eau qui reste dans le cône est de 2016π , quel est le rayon de la petite boule ? (Une sphère de rayon r a un volume de $\frac{4}{3}\pi r^3$. Un cône de rayon r et de hauteur h a un volume de $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.)



- (A) $2\sqrt{2}$ (B) 6 (C) 8
(D) $6\sqrt{2}$ (E) $4\sqrt[3]{2}$

25. On dit qu'un entier positif a k zéros trainants si ses k derniers chiffres sont des zéros et s'il y a un chiffre non nul immédiatement à la gauche de ces k zéros. Par exemple, le nombre 1 030 000 a 4 zéros trainants. L'expression $Z(m)$ représente le nombre de zéros trainants de l'entier positif m . Un jour qu'il s'ennuie, Louis fait une liste des valeurs de l'expression $n - Z(n!)$ pour chaque valeur entière de n de 100 à 10 000 inclusivement. Combien d'entiers paraissent au moins trois fois dans la liste de Louis ?

(Remarque : Si n est un entier strictement positif, l'expression $n!$ (que l'on nomme « factorielle n ») représente le produit des entiers de 1 à n . C'est-à-dire que $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$. Par exemple, $5! = 5(4)(3)(2)(1)$, ou $5! = 120$.)

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Cayley de 2013!

En 2012, plus de 75 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Pascal, Cayley et Fermat.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au concours Galois qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web pour :

- plus d'information à propos du concours Galois;
- des copies gratuites des concours précédents;
- des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs;
- de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours.

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril;
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants;
- trouver les résultats de votre école.