



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le jeudi 16 avril 2015

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 17 avril 2015

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 75 minutes

©2015 University of Waterloo

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. À RÉPONSE COURTE indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 2 ou 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. À DÉVELOPPEMENT indiquées comme ceci :



- Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14... ou 1,41..., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Chaque train du Chemin de fer Hypatie est composé d'une locomotive suivie d'un nombre de wagons en ligne droite. Il y a une distance de 2 m entre deux wagons consécutifs. Il y a aussi une distance de 2 m entre la locomotive et le premier wagon. La locomotive a une longueur de 26 m et chaque wagon a une longueur de 15 m. La longueur totale d'un train est la distance à partir du devant de la locomotive jusqu'à l'arrière du dernier wagon.



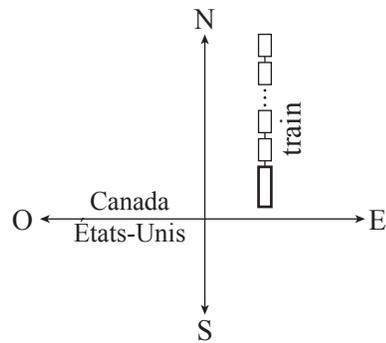
(a) Quelle est la longueur totale d'un train qui a 10 wagons ?



(b) Un train a une longueur totale de 2015 m. Combien de wagons de ce train a-t-il ?

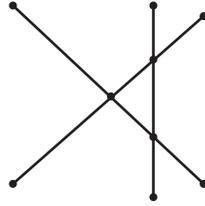


(c) Dans la figure ci-contre, un train avec 14 wagons traverse la frontière entre le Canada et les États-Unis en direction sud à une vitesse de 1,6 m/s. Déterminer le temps, en secondes, pendant lequel une partie du train se trouve au Canada et une autre partie du train se trouve aux États-Unis.



2. Dans les questions qui suivent, A, B, M, N, P, Q , et R sont des chiffres non nuls.
 - (a) Un entier positif de deux chiffres, AB , est égal à $10A + B$. Par exemple, $37 = 10 \times 3 + 7$. Sachant que $AB - BA = 72$, quel est l'entier positif AB ?
 - (b) On considère un entier positif de deux chiffres, MN . Expliquer pourquoi il est impossible que $MN - NM = 80$.
 - (c) Un entier positif de trois chiffres, PQR , est égal à $100P + 10Q + R$. Si $P > R$, déterminer le nombre de valeurs possibles de l'expression $PQR - RQP$.

3. On considère n segments de droites qui se coupent deux à deux à des points différents, aucun point d'intersection n'étant une extrémité d'un des segments. Soit $T(n)$ la somme du nombre du nombre de points d'intersection et du nombre d'extrémités des segments. Par exemple, $T(1) = 2$ et $T(2) = 5$. La figure ci-dessous indique comment $T(3) = 9$.



(a) Calculer $T(4)$ et $T(5)$.



(b) Exprimer $T(n) - T(n - 1)$ en fonction de n .



(c) Déterminer toutes les valeurs possibles de n pour lesquelles $T(n) = 2015$.

4. L'expression $PGCD(a, b)$ représente le plus grand commun diviseur des deux entiers strictement positifs a et b . Par exemple, $PGCD(18, 45) = 9$, car 9 est le plus grand entier positif qui est diviseur de 18 et de 45.

L'expression $P(n)$ représente la somme des n plus grands communs diviseurs $PGCD(1, n)$, $PGCD(2, n)$, \dots , $PGCD(n, n)$. Par exemple :

$$\begin{aligned} P(6) &= PGCD(1, 6) + PGCD(2, 6) + PGCD(3, 6) \\ &\quad + PGCD(4, 6) + PGCD(5, 6) + PGCD(6, 6) \\ &= 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 6 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Remarque : Il est permis d'utiliser le fait que $P(ab) = P(a)P(b)$ pour tous les entiers strictement positifs a et b pour lesquels $PGCD(a, b) = 1$.



(a) Calculer la valeur de $P(125)$.



(b) Étant donné deux nombres premiers distincts, r et s , démontrer que

$$P(r^2s) = r(3r - 2)(2s - 1)$$



(c) Étant donné deux nombres premiers distincts, r et s , démontrer que $P(r^2s)$ ne peut être égal à une puissance d'un nombre premier (c'est-à-dire ne peut être égal à t^n , t étant un nombre premier et n étant un entier strictement positif).



(d) Déterminer deux valeurs entières strictement positives de m pour lesquelles $P(m) = 243$. Justifier les étapes de sa présentation.



**Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE**
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2015! Chaque année, plus de 200 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2015.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2015/2016
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours