



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 12 avril 2017

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 13 avril 2017

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 75 minutes

©2017 University of Waterloo

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 2 ou 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.



ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

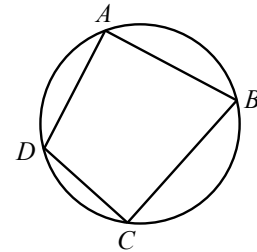
Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.


Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.


NOTE :


1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.


1. Un quadrilatère est *inscrit dans un cercle* si ses quatre sommets sont situés sur ce cercle. Dans un tel quadrilatère, les mesures des angles opposés ont une somme de 180° . Dans la figure ci-contre, le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle. Donc $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ = \angle BAD + \angle BCD$.



 (a) Dans la figure A ci-dessous, le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle. Sachant que $\angle BAD = 88^\circ$, quelle est la valeur de u ?

 (b) Dans la figure B, les quadrilatères $PQRS$ et $STQR$ sont inscrits dans un cercle. Sachant que $\angle STQ = 58^\circ$, quelle est la valeur de x et quelle est la valeur de y ?

 (c) Dans la figure C, le quadrilatère $JKLM$ est inscrit dans un cercle. De plus, $JK = KL$ et $JL = LM$. Sachant que $\angle KJL = 35^\circ$, quelle est la valeur de w ?

 (d) Dans la figure D, le quadrilatère $DEFG$ est inscrit dans un cercle. Le côté FG est prolongé jusqu'à H . Si $\angle DEF = z^\circ$, déterminer la mesure de l'angle DGH en fonction de z .

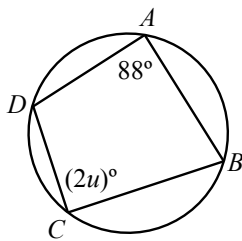


Figure A

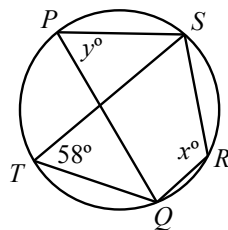


Figure B

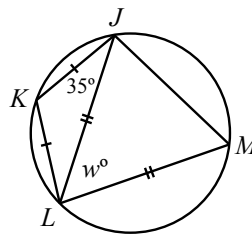


Figure C

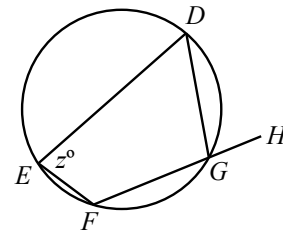


Figure D

2. On écrit des entiers dans un tableau que l'on remplit du haut vers le bas, rangée par rangée de gauche à droite. La rangée 1 contient l'entier 1. La rangée 2 contient les entiers 1, 2 et 3. La rangée n contient les entiers consécutifs de 1 jusqu'au $n^{\text{ième}}$ entier impair. Le 9^e entier écrit dans le tableau est un 5 qui est situé à la fin de la rangée 3. De façon générale, après avoir rempli n rangées, on a écrit un total de n^2 entiers.

Rangée 1	1
Rangée 2	1 2 3
Rangée 3	1 2 3 4 5
Rangée 4	1 2 3 4 5 6 7
⋮	



(a) Quel est le 25^e entier que l'on écrit dans le tableau et dans quelle rangée est-il situé ?



(b) Quel est le 100^e entier que l'on écrit dans le tableau ?



(c) Quel est le 2017^e entier que l'on écrit dans le tableau ?



(d) Dans combien des 200 premières rangées l'entier 96 paraît-il ?

3.



(a) La droite définie par $y = -15$ coupe la parabole d'équation $y = -x^2 + 2x$ en deux points. Quelles sont les coordonnées de ces deux points d'intersection ?



(b) Une droite coupe la parabole d'équation $y = -x^2 - 3x$ en $x = 4$ et en $x = a$. Cette droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 8)$. Déterminer la valeur de a .



(c) Une droite coupe la parabole d'équation $y = -x^2 + kx$ en $x = p$ et en $x = q$, où $p \neq q$. Déterminer l'ordonnée à l'origine de cette droite.



(d) Pour tous k ($k \neq 0$), la courbe définie par $x = \frac{1}{k^3}y^2 + \frac{1}{k}y$ coupe la parabole d'équation $y = -x^2 + kx$ au point $(0, 0)$ et en un deuxième point T dont les coordonnées dépendent de k . Tous ces points T sont situés sur une même parabole. Déterminer l'équation de cette parabole.

4. Un entier strictement positif est appelé un *nombre zigzag de n chiffres* si

- $3 \leq n \leq 9$,
- les chiffres du nombre sont $1, 2, \dots, n$ (sans répétitions) et
- pour chaque groupe de trois chiffres adjacents, le chiffre du milieu est soit supérieur aux deux autres chiffres ou il est inférieur aux deux autres chiffres.

Par exemple, 52314 est un nombre zigzag de 5 chiffres, mais 52143 ne l'est pas.



(a) Quel est le plus grand nombre zigzag de 9 chiffres ?



(b) Soit $G(n, k)$ le nombre de nombres zigzag de n chiffres dont le premier chiffre est k et le deuxième chiffre est plus grand que k . Soit $P(n, k)$ le nombre de nombres zigzag de n chiffres dont le premier chiffre est k et le deuxième chiffre est plus petit que k .

(i) Montrer que $G(6, 3) = P(5, 3) + P(5, 4) + P(5, 5)$.

(ii) Montrer que

$G(6, 1) + G(6, 2) + G(6, 3) + G(6, 4) + G(6, 5) + G(6, 6)$
est égal à

$P(6, 1) + P(6, 2) + P(6, 3) + P(6, 4) + P(6, 5) + P(6, 6)$.



(c) Déterminer le nombre de nombres zigzag de 8 chiffres.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2017! Chaque année, plus de 220 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2017.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2017/2018
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours