Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2019

le mercredi 3 avril 2019

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 4 avril 2019

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) *Solution 1*

Étant donné qu'un pot rempli à $\frac{3}{4}$ contient un volume de 300 mL, alors un pot rempli à $\frac{1}{4}$ contient un volume de (300 mL) $\div$ 3 ou 100 mL.

Solution 2

Étant donné qu'un pot rempli à $\frac{3}{4}$ contient un volume de 300 mL, alors le volume du pot entier équivaut à $\frac{4}{3}$(300 mL) ou 400 mL.

Donc, un pot rempli à $\frac{1}{4}$ contient un volume de (400 mL) $\div 4 = 100$ mL.

(b) Puisque $\dfrac{24}{a} > 3 > 0$, on remarque que a est donc positif.

Puisque $3 < \dfrac{24}{a}$ et $a > 0$, donc $a < \dfrac{24}{3} = 8$.

Puisque $\dfrac{24}{a} < 4$ et $a > 0$, donc $a > \dfrac{24}{4} = 6$.

Puisque $6 < a < 8$ et que a est un entier, donc $a = 7$.

On remarque qu'il est vrai que $3 < \dfrac{24}{7} < 4$.

(c) Puisque x et x^2 paraissent dans les dénominateurs de l'équation, alors $x \neq 0$.

On multiplie par x^2 et on manipule l'équation comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} &= 2 \\ 1 - x &= 2x^2 \\ 0 &= 2x^2 + x - 1 \\ 0 &= (2x-1)(x+1) \end{aligned}$$

donc $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -1$.

On reporte dans l'équation d'origine afin de vérifier les solutions :

$$\frac{1}{(1/2)^2} - \frac{1}{1/2} = \frac{1}{1/4} - \frac{1}{1/2} = 4 - 2 = 2$$

et

$$\frac{1}{(-1)^2} - \frac{1}{-1} = \frac{1}{1} + 1 = 2$$

Donc les solutions à l'équation sont bel et bien $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = -1$.

2. (a) Puisque le grand cercle a un rayon de 2, son aire est égale à $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$.

Puisque chacun des petits cercles a un rayon de 1, l'aire de chaque petit cercle est égale à $\pi \cdot 1^2 = \pi$.

Puisque les deux petits cercles sont tangents l'un à l'autre et sont aussi tangents au grand cercle, alors leurs régions ne se chevauchent pas. De plus, leurs régions sont entièrement contenues dans le grand cercle.

Puisque la région ombrée est la partie du grand cercle qui se trouve en dehors des deux petits cercles, la région ombrée est donc égale à $4\pi - \pi - \pi = 2\pi$.

(b) Mo commence à 10h00 et finit à 11h00. Il fait donc du jogging pendant 1 heure.

Mo court à une vitesse de 6 km/h. Cela signifie qu'il parcourt 6 km en l'espace d'une heure.

Donc, Kari parcourt aussi une distance de 6 km.

Puisque Kari court à une vitesse de 8 km/h, elle va donc faire du jogging pendant $\dfrac{6 \text{ km}}{8 \text{ km/h}}$ ou $\dfrac{3}{4}$ h, soit 45 minutes.

Puisque Kari finit de faire du jogging à 11h00. Cela signifie qu'elle a commencé à faire du jogging à 10h15.

(c) On réécrit l'équation $x + 3y = 7$ sous les formes $3y = -x + 7$ et $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.
Donc, la pente de la droite de cette équation est égale à $-\frac{1}{3}$.
Puisque les deux droites sont parallèles et que la droite d'équation $y = mx + b$ a une pente égale à m, alors $m = -\frac{1}{3}$.
Ainsi, on peut réécrire l'équation de la deuxième droite sous la forme $y = -\frac{1}{3}x + b$.
Puisque (9,2) est situé sur la droite, alors $2 = -\frac{1}{3} \cdot 9 + b$ ou $2 = -3 + b$, d'où $b = 5$.

3. (a) La liste de Michelle contient 8 nombres. Sa moyenne est donc égale à :

$$\frac{5 + 10 + 15 + 16 + 24 + 28 + 33 + 37}{8} = \frac{168}{8} = 21$$

La liste de Daphne contient donc 7 nombres (1 nombre de moins que la liste de Michelle) et a une moyenne égale à 20 (1 de moins que la moyenne de la liste de Michelle).
La liste de 7 nombres, dont la moyenne est de 20, a une somme qui est égale à $7 \cdot 20 = 140$.
Puisque les nombres dans la liste de Michelle avaient une somme de 168, alors Daphne a enlevé le nombre qui est égal à la différence suivante $168 - 140$, soit 28.

(b) Puisque $16 = 2^4$ et $32 = 2^5$, on peut donc réécrire l'équation comme telle

$$\begin{aligned} (2^4)^{15/x} &= (2^5)^{4/3} \\ 2^{60/x} &= 2^{20/3} \end{aligned}$$

Cela signifie que $\dfrac{60}{x} = \dfrac{20}{3} = \dfrac{60}{9}$ d'où $x = 9$.

(c) À l'aide des lois des exposants, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{2^{2022} + 2^a}{2^{2019}} &= 72 \\ 2^{2022-2019} + 2^{a-2019} &= 72 \\ 2^3 + 2^{a-2019} &= 72 \\ 8 + 2^{a-2019} &= 72 \\ 2^{a-2019} &= 64 \\ 2^{a-2019} &= 2^6 \end{aligned}$$

cela signifie que $a - 2019 = 6$ d'où $a = 2025$.

4. (a) *Solution 1*
Puisque le triangle CDB est rectangle en B, donc $\angle DCB = 90^\circ - \angle CDB = 30^\circ$.
Cela signifie que le triangle CDB est un triangle 30°-60°-90°.
On sait qu'il existe des rapports entre les longueurs des côtés dans un triangle 30°-60°-90°.
À l'aide de ceux-ci, on stipule alors que $CD : DB = 2 : 1$.
Puisque $DB = 10$, donc $CD = 20$.

Puisque $\angle CDB = 60^\circ$, alors $\angle ADC = 180^\circ - \angle CDB = 120^\circ$.
Puisque les angles dans le triangle ADC ont une somme de 180°, alors

$$\angle DAC = 180^\circ - \angle ADC - \angle ACD = 30^\circ$$

Cela signifie que le triangle ADC est un triangle isocèle où $AD = CD$.
Ainsi, $AD = CD = 20$.

Solution 2
Puisque le triangle CDB est rectangle en B, donc $\angle DCB = 90^\circ - \angle CDB = 30^\circ$.
Puisque le triangle ACB est rectangle en B, donc

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$

Cela signifie que les triangles CDB et ACB sont tous les deux des triangles 30°-60°-90°.
On sait qu'il existe des rapports entre les longueurs des côtés dans un triangle 30°-60°-90°.
À l'aide de ceux-ci, on stipule alors que $CB : DB = \sqrt{3} : 1$.
Puisque $DB = 10$, donc $CB = 10\sqrt{3}$.
De même, $AB : CB = \sqrt{3} : 1$.
Puisque $CB = 10\sqrt{3}$, donc $AB = \sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} = 30$.
Finalement, cela signifie que $AD = AB - DB = 30 - 10 = 20$.

(b) Puisque les points $A(d, -d)$ et $B(-d + 12{,}2d - 6)$ sont situés sur le même cercle dont le centre est situé à l'origine, O, alors $OA = OB$.
Puisque les distances ne peuvent avoir des valeurs négatives, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
\sqrt{(d-0)^2 + (-d-0)^2} &= \sqrt{((-d+12)-0)^2 + ((2d-6)-0)^2} \\
d^2 + (-d)^2 &= (-d+12)^2 + (2d-6)^2 \\
d^2 + d^2 &= d^2 - 24d + 144 + 4d^2 - 24d + 36 \\
2d^2 &= 5d^2 - 48d + 180 \\
0 &= 3d^2 - 48d + 180 \\
0 &= d^2 - 16d + 60 \\
0 &= (d-10)(d-6)
\end{aligned}$$

d'où $d = 10$ ou $d = 6$.
On peut vérifier que les points $A(10, -10)$ et $B(2{,}14)$ se trouvent tous les deux à une distance de $\sqrt{200}$ de l'origine. On peut aussi vérifier que les points $A(6, -6)$ et $B(6{,}6)$ se trouvent tous les deux à une distance de $\sqrt{72}$ de l'origine.

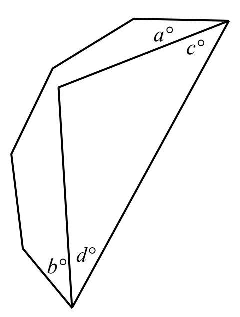
5. (a) Dans un premier temps, on remarque que $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
Ensuite, on remarque que $\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ et que $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.
À partir de ces dernières, on obtient $\sqrt{2} + \sqrt{32} = \sqrt{50}$ de la première et on obtient $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$ de la deuxième.
Ainsi, $(a, b) = (2, 32)$ et $(a, b) = (8, 18)$ sont des solutions à l'équation d'origine.
(Il n'est pas requis de justifier la raison pour laquelle ce sont les deux seules solutions.)

(b) À partir de la deuxième équation, on remarque que $d \neq 0$.
On peut réécrire cette deuxième équation comme telle $c = kd$.
On reporte cette dernière dans la première équation afin d'obtenir $kd + d = 2000$ ou $(k+1)d = 2000$.
Puisque $k \geq 0$, on remarque que $k + 1 \geq 1$.
Donc, si (c, d) est une solution, alors $k + 1$ est un diviseur de 2000.
De plus, si $k+1$ est un diviseur de 2000, alors l'équation $(k+1)d = 2000$ admet logiquement une valeur entière non nulle pour d. On se sert de cette dernière afin de déterminer la valeur entière de c à l'aide de la première équation.
Par conséquent, les valeurs de k que l'on veut compter correspondent aux diviseurs positifs de 2000.
Puisque $2000 = 10 \cdot 10 \cdot 20 = 2^4 \cdot 5^3$, alors 2000 a $(4 + 1)(3 + 1) = 20$ diviseurs positifs.
Cela est attribuable au fait que si p et q sont des nombres premiers distincts, l'entier positif $p^a \cdot q^b$ aurait $(a + 1)(b + 1)$ diviseurs positifs.
Dans le cas où la formule précédente nous était inconnue, on aurait pu dresser la liste de ces diviseurs :

$$1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 125, 200, 250, 400, 500, 1000, 2000$$

Puisque 2000 a 20 diviseurs positifs, il y a donc 20 valeurs de k qui admettraient au moins un couple d'entiers (c,d) comme solution au système.
Par exemple, si $k + 1 = 8$, alors $k = 7$, d'où le système $c + d = 2000$ et $\dfrac{c}{d} = 7$ qui a $(c, d) = (1750, 250)$ comme solution.

6. (a) *Solution 1*
La somme des mesures des angles d'un polygone à n côtés est égale à $(n - 2) \cdot 180°$.
Cela signifie que la somme des mesures des angles d'un pentagone est égale à $3 \cdot 180°$ ou $540°$. Sachant ceci, on déduit alors que chaque angle intérieur d'un pentagone régulier a une mesure de $\dfrac{1}{5} \cdot 540°$ ou $108°$.
D'ailleurs, dans un polygone régulier à n côtés, chaque angle intérieur a une mesure de $\dfrac{n-2}{n} \cdot 180°$. (Ceci est la version générale des énoncés des deux phrases précédentes.)
Considérons la partie du polygone régulier à n côtés qui n'est pas recouverte par le pentagone et relions les points à partir desquels émanent les angles de mesures $a°$ and $b°$ afin de former un hexagone.



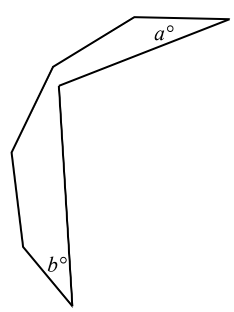
Puisque ce polygone a 6 côtés, la somme des mesures de ses 6 angles est égale à $4 \cdot 180°$.
Parmi ses angles, quatre sont les angles originaux du polygone à n côtés. Donc, chacun de ces quatre angles a une mesure de $\dfrac{n-2}{n} \cdot 180°$.

Les deux angles restants ont des mesures de $a^\circ + c^\circ$ et de $b^\circ + d^\circ$.
On sait que $a^\circ + b^\circ = 88^\circ$.
De plus, les angles dont les mesures sont de c° et de d° font partie d'un triangle dont le troisième angle a une mesure de 108°.
Alors, $c^\circ + d^\circ = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
4 \cdot \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ + 88^\circ + 72^\circ &= 4 \cdot 180^\circ \\
160^\circ &= \left(4 - \frac{4(n-2)}{n}\right) \cdot 180^\circ \\
160^\circ &= \frac{4n - (4n-8)}{n} \cdot 180^\circ \\
\frac{160^\circ}{180^\circ} &= \frac{8}{n} \\
\frac{8}{9} &= \frac{8}{n}
\end{aligned}$$

d'où la valeur de n est égale à 9.

Solution 2
La somme des mesures des angles d'un polygone à n côtés est égale à $(n-2) \cdot 180^\circ$.
Cela signifie que la somme des mesures des angles d'un pentagone est égale à $3 \cdot 180^\circ$ ou 540°. Sachant ceci, on déduit alors que chaque angle intérieur d'un pentagone régulier a une mesure de $\frac{1}{5} \cdot 540^\circ$ ou 108°.
D'ailleurs, dans un polygone régulier à n côtés, chaque angle intérieur a une mesure de $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$. (Ceci est la version générale des énoncés des deux phrases précédentes.)
Considérons la partie du polygone régulier à n côtés qui n'est pas recouverte par le pentagone.



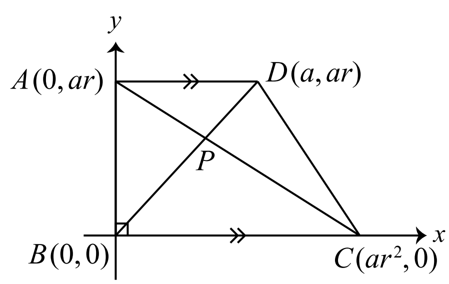
Puisque ce polygone a 7 côtés, la somme des mesures de ses 7 angles est égale à $5 \cdot 180^\circ$.
Parmi ses angles, quatre sont les angles originaux du polygone à n côtés. Donc, chacun de ces quatre angles a une mesure de $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.
De plus, deux de ses angles sont ceux dont les mesures sont de a° et de b° et dont la somme de ces derniers est égale à 88°.
Son septième angle est l'angle de réflexe correspondant à l'angle de 108° du pentagone et a donc une mesure de $360^\circ - 108^\circ$ ou 252°.

Ainsi,

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ + 88^\circ + 252^\circ &= 5 \cdot 180^\circ \\ 340^\circ &= \left(5 - \frac{4(n-2)}{n}\right) \cdot 180^\circ \\ 340^\circ &= \frac{5n-(4n-8)}{n} \cdot 180^\circ \\ \frac{340^\circ}{180^\circ} &= \frac{n+8}{n} \\ \frac{17}{9} &= \frac{n+8}{n} \\ 17n &= 9(n+8) \\ 17n &= 9n+72 \\ 8n &= 72 \end{aligned}$$

d'où la valeur de n est égale à 9.

(b) Puisque les longueurs AD, AB et BC forment une suite géométrique, on suppose que ces longueurs sont, respectivement, a, ar et ar^2 ; a et r étant des nombres réels supérieurs à 0. Puisque les angles à A et à B sont tous les deux des angles droits, on assigne des coordonnées au diagramme en plaçant B au point d'origine $(0,0)$, C au point $(ar^2,0)$ sur le côté positif de l'axe des abscisses, A au point $(0,ar)$ sur le côté positif de l'axe des ordonnées, et D au point (a,ar).



Ainsi, le segment de droite reliant le point $B(0{,}0)$ au point $D(a,ar)$ a une pente qui est égale à $\dfrac{ar-0}{a-0} = r$.

De plus, le segment de droite reliant le point $A(0{,}ar)$ au point $C(ar^2,0)$ a une pente qui est égale à $\dfrac{ar-0}{0-ar^2} = -\dfrac{1}{r}$.

Ces segments de droite sont perpendiculaires car leurs pentes ont un produit de -1, ce qu'il fallait démontrer.

7. (a) À l'aide des lois des logarithmes et des lois des exposants, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} 2\log_2(x-1) &= 1 - \log_2(x+2) \\ 2\log_2(x-1) + \log_2(x+2) &= 1 \\ \log_2\left((x-1)^2\right) + \log_2(x+2) &= 1 \\ \log_2\left((x-1)^2(x+2)\right) &= 1 \\ (x-1)^2(x+2) &= 2^1 \\ (x^2-2x+1)(x+2) &= 2 \\ x^3-3x+2 &= 2 \\ x^3-3x &= 0 \\ x(x^2-3) &= 0 \end{aligned}$$

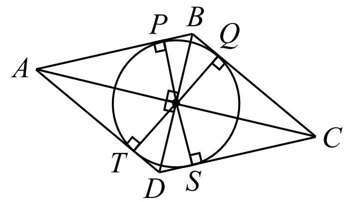
d'où $x=0$ ou $x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$.
On remarque que si $x=0$, alors $x-1=-1<0$, d'où $\log_2(x-1)$ est non définie. Donc, $x \neq 0$.
On remarque que si $x=-\sqrt{3}$, alors $x-1=-\sqrt{3}-1<0$ d'où $\log_2(x-1)$ est non définie. Donc, $x \neq -\sqrt{3}$.
Si $x=\sqrt{3}$, on peut vérifier que les deux logarithmes de l'équation d'origine sont définies et que l'équation d'origine est vraie. Pour en être convaincu, on pourrait se servir d'une calculatrice. On pourrait aussi vérifier cela algébriquement en constatant qu'on obtient le même nombre en élevant les deux côtés à la puissance 2. Donc les expressions doivent effectivement être égales.
Ainsi, $x=\sqrt{3}$ est la seule solution.

(b) Soit $a=f(f(x))$.
Donc, l'équation $f(f(f(x)))=3$ est équivalente à $f(a)=3$.
Puisque $f(a)=a^2-2a$, on obtient donc l'équation $a^2-2a=3$ d'où $a^2-2a-3=0$ et $(a-3)(a+1)=0$.
Ainsi, $a=3$ ou $a=-1$. Cela signifie que $f(f(x))=3$ ou $f(f(x))=-1$.
Soit $b=f(x)$.
Donc, les équations $f(f(x))=3$ et $f(f(x))=-1$ deviennent $f(b)=3$ et $f(b)=-1$.
Si l'on emploie le même raisonnement que celui ci-dessus, lorsque $f(b)=3$, alors $b=f(x)=3$ ou $b=f(x)=-1$.
Si $f(b)=-1$, alors $b^2-2b=-1$ d'où $b^2-2b+1=0$ ou $(b-1)^2=0$. Cela signifie que $b=f(x)=1$.
Donc, $f(x)=3$ ou $f(x)=-1$ ou $f(x)=1$.
Si $f(x)=3$, alors $x=3$ ou $x=-1$ comme énoncé ci-dessus.
Si $f(x)=-1$, alors $x=1$ comme énoncé ci-dessus.
Si $f(x)=1$, alors $x^2-2x=1$ d'où $x^2-2x-1=0$.
À l'aide de la formule quadratique,

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Donc, l'équation $f(f(f(x)))=3$ a comme solutions $x=3, 1, -1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$.

8. (a) Puisque $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA$ et que ces angles forment un cercle complet autour de O, alors $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$.
On relie le point O aux points P, B, Q, C, S, D, T et A.



Puisque P, Q, S et T sont des points de tangence, alors les rayons sont perpendiculaires aux côtés $ABCD$ en ces points.
Puisque $AO = 3$, que $OT = 1$ et que $\angle OTA = 90^\circ$, alors à l'aide du théorème de Pythagore, $AT = \sqrt{AO^2 - OT^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Puisque le triangle OTA est rectangle en T, alors $\angle TAO + \angle AOT = 90^\circ$.
Puisque $\angle DOA = 90^\circ$, alors $\angle AOT + \angle DOT = 90^\circ$.
Donc, $\angle TAO = \angle DOT$.
Cela signifie que les triangles ATO et OTD sont semblables.
Donc, $\dfrac{DT}{OT} = \dfrac{OT}{AT}$ d'où $DT = \dfrac{OT^2}{AT} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Puisque DS et DT sont tangentes au cercle à partir du même point, alors $DS = DT = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

(b) Puisque $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, donc $0 < \cos x < 1$ et $0 < \sin x < 1$.
Cela signifie que $0 < \dfrac{3}{2}\cos x < \dfrac{3}{2}$ et que $0 < \dfrac{3}{2}\sin x < \dfrac{3}{2}$.
Puisque $3 < \pi$, alors $0 < \dfrac{3}{2}\cos x < \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < \dfrac{3}{2}\sin x < \dfrac{\pi}{2}$.
Si Y et Z sont des angles qui vérifient $0 < Y < \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < Z < \dfrac{\pi}{2}$, alors $\cos Y = \sin Z$ uniquement lorsque $Y + Z = \dfrac{\pi}{2}$. Afin de nous aider à visualiser cela, on peut placer les points R et S sur le cercle unité de manière à ce qu'ils correspondent aux angles Y et Z ; l'abscisse du point R est égale à l'ordonnée du point S uniquement lorsque les angles Y et Z sont des angles complémentaires.
Donc, les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{3}{2}\cos x\right) &= \sin\left(\frac{3}{2}\sin x\right) \\
\frac{3}{2}\cos x + \frac{3}{2}\sin x &= \frac{\pi}{2} \\
\cos x + \sin x &= \frac{\pi}{3} \\
(\sin x + \cos x)^2 &= \frac{\pi^2}{9} \\
\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x &= \frac{\pi^2}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\sin x\cos x+(\sin^2 x+\cos^2 x)&=\frac{\pi^2}{9}\\ \sin 2x+1&=\frac{\pi^2}{9}\\ \sin 2x&=\frac{\pi^2-9}{9}\end{aligned}$$

Finalement, $\dfrac{\pi^2-9}{9}$ est la seule valeur possible de $\sin 2x$.

9. (a) Par définition, $f(2,5)=\dfrac{2}{5}+\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2\cdot 5}=\dfrac{2\cdot 2+5\cdot 5+1}{2\cdot 5}=\dfrac{4+25+1}{10}=\dfrac{30}{10}=3$.

(b) Par définition, $f(a,a)=\dfrac{a}{a}+\dfrac{a}{a}+\dfrac{1}{a^2}=2+\dfrac{1}{a^2}$.
Afin que $2+\dfrac{1}{a^2}$ soit un entier, $\dfrac{1}{a^2}$ doit aussi être un entier.
Afin que $\dfrac{1}{a^2}$ soit un entier, et puisque a^2 est un entier, a^2 doit être un diviseur de 1.
Puisque a^2 est positif, alors $a^2=1$.
Puisque a est un entier positif, alors $a=1$.
Ainsi, $a=1$ est le seul entier positif a pour lequel $f(a,a)$ est un entier.

(c) Supposons que a et b sont des entiers positifs pour lesquels $f(a,b)$ est un entier.
Supposons aussi que $k=f(a,b)$ n'est pas un multiple de 3.
On va montrer qu'il va y avoir une contradiction qui mènera donc à la conclusion que k doit être un multiple de 3.
Par définition, $k=f(a,b)=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{ab}$.
En multipliant par ab on obtient $kab=a^2+b^2+1$, que l'on peut réécrire sous la forme $a^2-(kb)a+(b^2+1)=0$.
On considère cette équation comme étant quadratique où la variable est représentée par a et où les coéfficients seraient représentés en termes des variables b et k.
À l'aide de la formule quadratique, on peut déterminer les valeurs de a (en termes des variables b et k) qui satisfont l'équation quadratique

$$a=\frac{kb\pm\sqrt{(-kb)^2-4(1)(b^2+1)}}{2}=\frac{kb\pm\sqrt{k^2b^2-4b^2-4}}{2}$$

Puisque a est un entier, alors le discriminant $k^2b^2-4b^2-4$ doit être un carré parfait.
On peut réécrire le discriminant comme tel

$$k^2b^2-4b^2-4=b^2(k^2-4)-4=b^2(k-2)(k+2)-4$$

Puisque k n'est pas un multiple de 3, il est donc 1 de plus qu'un multiple de 3, ou 2 de plus qu'un multiple de 3.
Si k est 1 de plus qu'un multiple de 3, alors $k+2$ est un multiple de 3.
Si k est 2 de plus qu'un multiple de 3, alors $k-2$ est un multiple de 3.
Logiquement, $(k-2)(k+2)$ est donc un multiple de 3, chose que l'on clarifie en écrivant $(k-2)(k+2)=3m$, m étant un entier quelconque.
Cela signifie que l'on peut encore réécrire le discriminant ; cette fois-ci de la manière suivante :

$$b^2(3m)-4=3(b^2m-2)+2$$

Autrement dit, le discriminant lui-même est égal à 2 de plus qu'un multiple de 3.
Cependant, chaque carré parfait est soit un multiple de 3, soit 1 de plus qu'un multiple de 3 :

Supposons que r est un entier. Considérons r^2.
On peut représenter l'entier r à l'aide d'une des expressions suivantes : $3q$, $3q+1$ et $3q+2$; q étant un entier quelconque.
À partir de ces trois cas,

$$\begin{aligned}(3q)^2 &= 9q^2 = 3(3q^2)\\(3q+1)^2 &= 9q^2+6q+1 = 3(3q^2+2q)+1\\(3q+2)^2 &= 9q^2+12q+4 = 3(3q^2+4q+1)+1\end{aligned}$$

On comprend alors que r^2 est soit un multiple de 3, soit 1 de plus qu'un multiple de 3.

On avait déterminé que le discriminant était un carré parfait mais qu'il était aussi 2 de plus qu'un multiple de 3. Ceci est une contradiction.
Cela signifie que notre supposition initiale doit être incorrecte. Donc $k = f(a,b)$ doit être un multiple de 3.

(d) *Solution 1*
On détermine des couples additionnels d'entiers positifs (a,b) pour lesquels $f(a,b) = 3$.
Supposons que $f(a,b) = 3$.
Ceci est équivalent aux équations $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{1}{ab} = 3$ et $a^2 + b^2 - 3ab + 1 = 0$.
Donc

$$\begin{aligned}f(b,3b-a) - 3 &= \frac{b}{3b-a} + \frac{3b-a}{b} + \frac{1}{b(3b-a)} - 3\\&= \frac{b^2 + (3b-a)^2 + 1 - 3b(3b-a)}{b(3b-a)}\\&= \frac{b^2 + (3b-a)(3b-a) + 1 - 3b(3b-a)}{b(3b-a)}\\&= \frac{b^2 - a(3b-a) + 1}{b(3b-a)}\\&= \frac{b^2 + a^2 - 3ab + 1}{b(3b-a)}\\&= 0\end{aligned}$$

Ainsi, si $f(a,b) = 3$, alors $f(b, 3b-a) = 3$.
De l'équation $f(1,2) = 3$ on obtient $f(2, 3(2)-1) = f(2,5) = 3$.
De l'équation $f(2,5) = 3$ on obtient $f(5, 3(5)-2) = f(5,13) = 3$.
De l'équation $f(5,13) = 3$ on obtient $f(13, 3(13)-5) = f(13,34) = 3$.
De l'équation $f(13,34) = 3$ on obtient $f(34, 3(34)-13) = f(34,89) = 3$.
De l'équation $f(34,89) = 3$ on obtient $f(89, 3(89)-34) = f(89,233) = 3$.
Ainsi, les couples $(a,b) = (5,13)$,$(13,34)$,$(34,89)$,$(89,233)$ remplissent les conditions énoncées dans la question.

Solution 2
On remarque que

$$\begin{aligned}
f(5,13) &= \frac{5}{13}+\frac{13}{5}+\frac{1}{5\cdot 13} = \frac{5^2+13^2+1}{65} = \frac{195}{65} = 3 \\
f(13,34) &= \frac{13}{34}+\frac{34}{13}+\frac{1}{13\cdot 34} = \frac{13^2+34^2+1}{442} = \frac{1326}{442} = 3 \\
f(34,89) &= \frac{34}{89}+\frac{89}{34}+\frac{1}{34\cdot 89} = \frac{34^2+89^2+1}{3026} = \frac{9078}{3026} = 3 \\
f(89,233) &= \frac{89}{233}+\frac{233}{89}+\frac{1}{89\cdot 233} = \frac{89^2+233^2+1}{20737} = \frac{62\,211}{20\,737} = 3
\end{aligned}$$

Ainsi, les couples $(a,b)=(5,13)$,$(13,34)$,$(34,89)$,$(89,233)$ remplissent les conditions énoncées dans la question.

D'où viennent ces couples ?
On peut définir la suite de Fibonacci $F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots$ par $F_1 = F_2 = 1$ et $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$ lorsque $n \geq 3$.
Ainsi, la suite de Fibonacci débute avec les nombres $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$.
Les couples (a,b) énoncés ci-dessus prennent la forme $(F_{2k-1}$,$F_{2k+1})$ pour les entiers $k \geq 3$.
On remarque que

$$\begin{aligned}
f(F_{2k-1}, F_{2k+1}) &= \frac{F_{2k-1}}{F_{2k+1}} + \frac{F_{2k+1}}{F_{2k-1}} + \frac{1}{F_{2k-1}F_{2k+1}} \\
&= \frac{(F_{2k-1})^2 + (F_{2k+1})^2 + 1}{F_{2k-1}F_{2k+1}} \\
&= \frac{(F_{2k-1})^2 + (F_{2k} + F_{2k-1})^2 + 1}{F_{2k-1}(F_{2k} + F_{2k-1})} \\
&= \frac{2(F_{2k-1})^2 + 2F_{2k}F_{2k-1} + (F_{2k})^2 + 1}{(F_{2k-1})^2 + F_{2k}F_{2k-1}} \\
&= \frac{2(F_{2k-1})^2 + 2F_{2k}F_{2k-1}}{(F_{2k-1})^2 + F_{2k}F_{2k-1}} + \frac{(F_{2k})^2 + 1}{(F_{2k-1})^2 + F_{2k}F_{2k-1}} \\
&= 2 + \frac{(F_{2k})^2 + 1}{F_{2k-1}F_{2k+1}}
\end{aligned}$$

Cela signifie que $f(F_{2k-1}, F_{2k+1}) = 3$ uniquement lorsque $\dfrac{(F_{2k})^2+1}{F_{2k-1}F_{2k+1}} = 1$ (ou, de manière équivalente, lorsque $(F_{2k})^2 + 1 = F_{2k-1}F_{2k+1}$ ou lorsque $(F_{2k})^2 - F_{2k-1}F_{2k+1} = -1$).
On remarque que $(F_2)^2 - F_1F_3 = 1^2 - 1\cdot 2 = -1$ et que $(F_4)^2 - F_3F_5 = 3^2 - 2\cdot 5 = -1$.
Donc cela est vrai lorsque $k = 1$ et $k = 2$.

De plus, on remarque que

$$\begin{aligned}
(F_{2k+2})^2 - F_{2k+1}F_{2k+3} &= (F_{2k+2})^2 - F_{2k+1}(F_{2k+2} + F_{2k+1}) \\
&= (F_{2k+2})^2 - F_{2k+1}F_{2k+2} - (F_{2k+1})^2 \\
&= F_{2k+2}(F_{2k+2} - F_{2k+1}) - (F_{2k+1})^2 \\
&= F_{2k+2}F_{2k} - (F_{2k+1})^2 \\
&= (F_{2k+1} + F_{2k})F_{2k} - (F_{2k+1})^2 \\
&= (F_{2k})^2 + F_{2k+1}F_{2k} - (F_{2k+1})^2 \\
&= (F_{2k})^2 + F_{2k+1}(F_{2k} - F_{2k+1}) \\
&= (F_{2k})^2 + F_{2k+1}(-F_{2k-1}) \\
&= (F_{2k})^2 - F_{2k+1}F_{2k-1}
\end{aligned}$$

Cela signifie que puisque $(F_4)^2 - F_3F_5 = -1$, donc $(F_6)^2 - F_5F_7 = -1$, qui signifie à son tour que $(F_8)^2 - F_7F_9 = -1$, et ainsi de suite.
En continuant de cette manière, $(F_{2k})^2 - F_{2k-1}F_{2k+1} = -1$ pour tout entier positif $k \geq 1$.
Cela signifie à son tour que $f(F_{2k-1}, F_{2k+1}) = 3$, ce qu'il fallait démontrer.

10. (a) À ses deux premiers tours, Brigitte choisit soit deux cartes de la même couleur, soit deux cartes de couleurs différentes. Si elle choisit deux cartes de couleurs différentes, alors à son troisième tour, elle choisira forcément une carte qui correspondra à l'une des deux premières cartes.
Par conséquent, le jeu se terminera soit au troisième tour de Brigitte, soit avant.
Ainsi, si Amir est le gagnant, c'est qu'il aura forcément gagné à son deuxième ou à son troisième tour. (Il ne peut pas gagner dès le premier tour.)

Pour qu'Amir gagne à son deuxième tour, la deuxième carte qu'il choisit doit correspondre à la première carte qu'il choisit.
Lors de son deuxième tour, il aura 5 cartes en main, dont 1 correspondra à la couleur de la première carte qu'il a choisie.
Par conséquent, la probabilité qu'Amir gagne à son deuxième tour est égale à $\frac{1}{5}$.
Il est à remarquer qu'il n'y a aucune restriction sur la première carte qu'il choisit ou sur la première carte que choisit Brigitte.

Afin qu'Amir gagne à son troisième tour, les conditions suivantes doivent être remplies : (i) la couleur de la deuxième carte qu'il choisit est différente de celle de la première carte qu'il choisit, (ii) la couleur de la deuxième carte que Brigitte choisit diffère de la couleur de la première carte qu'elle choisit et (iii) la couleur de la troisième carte qu'Amir choisit correspond à la couleur de l'une des deux premières cartes qu'il a choisies.
La probabilité de (i) est égale à $\frac{4}{5}$, puisqu'il doit choisir une carte autre que celle qui correspond à la première.
La probabilité de (ii) est égale à $\frac{2}{3}$, puisque Brigitte doit choisir l'une des cartes qui ne correspond pas à sa première carte.
La probabilité de (iii) est égale à $\frac{2}{4}$, puisque Amir peut choisir l'une des 2 cartes qui correspond à l'une des deux premières cartes qu'il a choisies.
Encore une fois, les cartes choisies par Amir et Brigitte lors de leur premier tour n'ont aucune importance.
Donc, la probabilité qu'Amir gagne à son troisième tour est égale à $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4}$, soit $\frac{4}{15}$.

Finalement, la probabilité qu'Amir gagne le jeu est donc $\frac{1}{5} + \frac{4}{15}$, soit $\frac{7}{15}$.

(b) Supposons que p représente la probabilité qu'il y ait un nombre pair de pile après avoir lancé les 13 premières pièces.
Donc, $1-p$ représente la probabilité qu'il y ait un nombre impair de pile.
Lorsque la 14^{e} pièce est lancée, la probabilité qu'elle tombe du côté pile est égale à h_{14} tandis que la probabilité qu'elle ne tombe pas du côté pile est égale à $1-h_{14}$.
Après le 14^{e} lancer, il peut y avoir un nombre pair de pile s'il y a eu un nombre pair de pile dans les 13 premiers lancers et que le 14^{e} lancer n'ait pas pile comme résultat. De même, on pourrait aussi obtenir un nombre pair de pile après le 14^{e} lancer s'il y a eu un nombre impair de pile dans les 13 premiers lancers et que le 14^{e} lancer ait pile comme résultat.
La probabilité de cela est égale à $p(1-h_{14})+(1-p)h_{14}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
p(1-h_{14})+(1-p)h_{14} &= \tfrac{1}{2} \\
2p-2ph_{14}+2h_{14}-2ph_{14} &= 1 \\
0 &= 4ph_{14}-2p-2h_{14}+1 \\
0 &= 2p(2h_{14}-1)-(2h14-1) \\
0 &= (2p-1)(2h_{14}-1)
\end{aligned}$$

Donc, soit $h_{14}=\frac{1}{2}$, soit $p=\frac{1}{2}$.
Si $h_{14}=\frac{1}{2}$, on a prouvé le résultat.
Si $h_{14}\neq\frac{1}{2}$, donc $p=\frac{1}{2}$.
Cela signifie que la probabilité d'obtenir un nombre pair de pile à partir des 13 premiers lancers est égale à $\frac{1}{2}$.
On peut répéter l'argument ci-dessus pour conclure que soit $h_{13}=\frac{1}{2}$, soit la probabilité d'obtenir un nombre pair de pile à partir des 12 premiers lancers est égale à $\frac{1}{2}$.
En continuant de cette manière, soit un de $h_{14},h_{13},\ldots,h_3,h_2$ peut être égal à $\frac{1}{2}$, soit la probabilité d'obtenir un nombre pair de pile à partir d'un seul lancer est égale à $\frac{1}{2}$.
Cette dernière affirmation revient simplement à dire que la probabilité d'obtenir pile après le premier lancer est égale à $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire, $h_1=\frac{1}{2}$).
Donc, parmi les probabilités $h_1,h_2,\ldots,h_{13},h_{14}$, au moins une doit être égale à $\frac{1}{2}$.

(c) Afin que les deux chiffres imprimés aient une somme de 2, chaque chiffre doit être un 1.
Donc, $S(2) = p_1q_1$.
Afin que les deux chiffres imprimés aient une somme de 12, chaque chiffre doit être un 6.
Donc, $S(12) = p_6q_6$.
Afin que les deux chiffres imprimés aient une somme de 7, les chiffres doivent être soit 1 et 6, soit 2 et 5, soit 3 et 4, soit 4 et 3, soit 5 et 2, soit 6 et 1.
Donc, $S(7) = p_1q_6 + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 + p_6q_1$.
Puisque $S(2) = S(12)$, alors $p_1q_1 = p_6q_6$.
Puisque $S(2) > 0$ et $S(12) > 0$, alors $p_1, q_1, p_6, q_6 > 0$.
Si $p_1 = p_6$, alors on peut diviser les deux côtés de $p_1q_1 = p_6q_6$ par $p_1 = p_6$ afin d'obtenir $q_1 = q_6$.
Si $q_1 = q_6$, alors on peut diviser les deux côtés de $p_1q_1 = p_6q_6$ par $q_1 = q_6$ afin d'obtenir $p_1 = p_6$.
Ainsi, si on peut démontrer que $p_1 = p_6$ ou que $q_1 = q_6$, notre résultat sera vrai.
Supposons que $p_1 \neq p_6$ et que $q_1 \neq q_6$.
Puisque $S(2) = \frac{1}{2}S(7)$ et $S(12) = \frac{1}{2}S(7)$, donc

$$\begin{aligned}
S(7) - \tfrac{1}{2}S(7) - \tfrac{1}{2}S(7) &= 0 \\
S(7) - S(2) - S(12) &= 0 \\
p_1q_6 + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 + p_6q_1 - p_1q_1 - p_6q_6 &= 0 \\
p_1q_6 + p_6q_1 - p_1q_1 - p_6q_6 + (p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2) &= 0 \\
(p_1 - p_6)(q_6 - q_1) + (p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2) &= 0 \\
p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 &= -(p_1 - p_6)(q_6 - q_1) \\
p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 &= (p_1 - p_6)(q_1 - q_6)
\end{aligned}$$

Puisque $p_2, p_3, p_4, p_5, q_2, q_3, q_4, q_5 \geq 0$, alors $p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 \geq 0$.
À partir de cela, $(p_1 - p_6)(q_1 - q_6) \geq 0$.
Puisque $p_1 \neq p_6$, alors soit $p_1 > p_6$, soit $p_1 < p_6$.
Si $p_1 > p_6$, donc $p_1 - p_6 > 0$ d'où $(p_1 - p_6)(q_1 - q_6) \geq 0$ nous amène à comprendre que $q_1 - q_6 > 0$ qui signifie à son tour que $q_1 > q_6$.
Or, sachant que $p_1q_1 = p_6q_6$ et que $p_1, q_1, p_6, q_6 > 0$, $p_1 > p_6$ et $q_1 > q_6$ sont alors inadmissibles.
Si $p_1 < p_6$, donc $p_1 - p_6 < 0$ d'où $(p_1 - p_6)(q_1 - q_6) \geq 0$ nous amène à comprendre que $q_1 - q_6 < 0$ qui signifie à son tour que $q_1 < q_6$.
Or, sachant que $p_1q_1 = p_6q_6$ et que $p_1,q_1,p_6,q_6 > 0$, $p_1 < p_6$ et $q_1 < q_6$ sont alors inadmissibles. Cela est une contradiction.
Ainsi, puisque $p_1 > p_6$ et $p_1 < p_6$ sont inadmissibles, il doit être vrai que $p_1 = p_6$ qui signifie à son tour que $q_1 = q_6$, ce qu'il fallait démontrer.