



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

# Concours Hypatie

(11<sup>e</sup> année – Sec. V)

Avril 2021

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

Avril 2021

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF  
**WATERLOO**

Durée : 75 minutes

©2021 University of Waterloo

*Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.*

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 2 ou 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.



**ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.**

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple,  $\pi + 1$  et  $1 - \sqrt{2}$  sont des nombres exacts simplifiés.

*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*


*Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca). Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.*


NOTE :






1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par  $y = x^3 - x$ , mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Une entreprise offre la possibilité de louer des véhicules de tailles différentes selon le nombre de passagers. Quelques-uns de leurs prix sont indiqués dans le tableau ci-dessous. Par exemple, un groupe de 5, 6, 7 ou 8 personnes devrait louer un véhicule utilitaire sport (VUS) dont le coût total serait de 200,00 \$. Malheureusement, le coût total de location d'une fourgonnette n'est pas indiqué dans le tableau. Dans chaque cas, les membres du groupe partagent à parts égales le coût total de la location du véhicule.

Véhicule	Nombre de passagers requis	Coût total
Voiture	1 to 4	180,00 \$
VUS	5 to 8	200,00 \$
Fourgonnette	9 to 12	

-  (a) Si 4 personnes louent une voiture, quel est le coût par personne?

 (b) Si un groupe loue un VUS, quel est le coût maximal possible par personne?

 (c) Lorsqu'on loue une fourgonnette, la différence entre le coût maximal par personne et le coût minimal par personne est de 6,00 \$. Déterminer le coût total de location d'une fourgonnette.
2. Le trapèze  $ABCD$  a pour sommets  $A(0, 0)$ ,  $B(12, 0)$ ,  $C(11, 5)$  et  $D(2, 5)$ .
  -  (a) Quelle est l'aire du trapèze  $ABCD$  ?
  -  (b) La droite passant par  $B$  et  $D$  coupe l'axe des ordonnées en point  $E$ . Quelles sont les coordonnées de  $E$  ?
  -  (c) Les côtés  $AD$  et  $BC$  sont prolongés de manière à se couper en point  $F$ . Déterminer les coordonnées de  $F$ .
  -  (d) Déterminer tous les points possibles  $P$  situés sur la droite passant par  $B$  et  $D$  tels que le triangle  $PAB$  ait une aire de 42.

3. La suite  $A$ , ayant pour termes  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , est telle que

$$a_n = 2^n \text{ lorsque } n \geq 1.$$

La suite  $B$ , ayant pour termes  $b_1, b_2, b_3, \dots$ , est telle que

$$b_1 = 1, b_2 = 1 \text{ et } b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2} \text{ lorsque } n \geq 3.$$

Par exemple,  $b_3 = b_2 + 2b_1 = 1 + 2(1) = 3$ .

Pour cette question, on peut faire appel aux propriétés suivantes :

- Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle appelée raison. Par exemple, 3, 6 et 12 sont les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison 2.
- Les  $n$  premiers termes d'une suite géométrique de premier terme  $a$  et de raison  $r \neq 1$  ont une somme de  $a \left( \frac{1 - r^n}{1 - r} \right)$ .



- (a) Quels sont les 5<sup>e</sup> termes de chaque suite ? Autrement dit, quelles sont les valeurs de  $a_5$  et  $b_5$  ?



- (b) Pour certains nombres réels  $p$  et  $q$ ,  $b_n = p \cdot (a_n) + q \cdot (-1)^n$  pour toutes les valeurs  $n \geq 1$ . (Il n'est pas nécessaire de démontrer cela.) Quelles sont les valeurs de  $p$  et  $q$  ?



- (c) Soit  $S_n$  la somme des  $n$  premiers termes de la suite  $B$ . Autrement dit,  $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ . Déterminer le plus petit entier strictement positif  $n$  qui vérifie  $S_n \geq 16^{2021}$ .

4. Dans le triangle  $XYZ$ , l'angle  $XZY$  a une mesure de  $90^\circ$ . De plus,  $YZ = x$  cm,  $XZ = y$  cm et l'hypoténuse  $XY$  a une longueur de  $z$  cm. De surcroît, le triangle  $XYZ$  a un périmètre de  $P$  cm et une aire de  $A$  cm<sup>2</sup>.



- (a) Si  $x = 20$  et  $y = 21$ , quelles sont les valeurs de  $A$  et  $P$  ?



- (b) Si  $z = 50$  et  $A = 336$ , quelle est la valeur de  $P$  ?



- (c) Déterminer toutes les valeurs entières possibles de  $x$ ,  $y$  et  $z$  pour lesquelles  $A = 3P$ .



- (d) Soit  $x$ ,  $y$  et  $z$  des entiers, soit  $P = 510$  et soit  $A = kP$ ,  $k$  étant un nombre premier. Déterminer toutes les valeurs possibles de  $k$ .



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

*Pour les élèves...*

Merci d'avoir participé au concours Hypatie de 2021! Chaque année, plus de 260 000 élèves, provenant de 80 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2021.

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

*Pour les enseignants...*

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2021/2022
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de la 9<sup>e</sup> à la 12<sup>e</sup> année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours