CEMI à la maison

9e et 10e année - mardi 14 avril 2020
Quelques pièces de monnaie

Dans le pays peu connu de Galbrathia, il n'existe que deux types de monnaie : une pièce de monnaie de 5 $\mathbb{J}$ et un billet de 9 $\mathbb{J}$. En utilisant cette monnaie, tu peux représenter certaines sommes, mais pas d'autres. Par exemple, tu peux représenter 19 $\mathbb{J}$ en utilisant deux pièces de 5 $\mathbb{J}$ et un billet de 9 $\mathbb{J}$, mais il n'est pas possible de représenter 17 $\mathbb{J}$ en utilisant ces pièces de monnaie et ces billets.

Notre objectif est de déterminer la plus grande somme d'argent qui ne peut pas être représentée en utilisant ces billets et pièces de monnaie.

1. Montre comment tu peux représenter 23 $\mathbb{J}$ en utilisant ces billets et pièces de monnaie.
2. Explique pourquoi tu ne peux pas représenter 17 $\mathbb{J}$ en utilisant ces billets et pièces de monnaie.
3. Le tableau ci-dessous montre une manière de représenter chacune des valeurs de 40 $\mathbb{J}$ à 44 $\mathbb{J}$, inclus :

Montant (en $\mathbb{J}$)	Nombre de pièces de monnaie de 5 $\mathbb{J}$	Nombre de billets de 9 $\mathbb{J}$
40	8	0
41	1	4
42	3	3
43	5	2
44	7	1

   Explique comment utiliser ces informations pour représenter chacune des valeurs de 45 $\mathbb{J}$ à 49 $\mathbb{J}$, inclus.

   Pour commencer, réfléchis à la façon dont les informations contenues dans le tableau sur 40 $\mathbb{J}$ *peuvent t'aider à représenter* 45 $\mathbb{J}$.

4. Explique comment les informations de la question 3 nous permettent de dire que l'on peut représenter *toutes* sommes d'argent d'au moins 40 $\mathbb{J}$.

   Pour commencer, réfléchis à la manière dont tu pourrais représenter les valeurs de 50 $\mathbb{J}$ *à* 54 $\mathbb{J}$.

5. Quel est le montant le plus élevé N $\mathbb{J}$ qui ne peut pas être représenté en utilisant ces billets et pièces de monnaie ?

   Pour répondre complètement à cette question, tu devras faire quelques recherches pour déterminer la valeur de l'entier positif N. Ensuite, tu devras démontrer que N $\mathbb{J}$ ne peut pas, en fait être représenté. Enfin, tu devras démontrer que toutes les valeurs à partir de $(N+1)$ $\mathbb{J}$ peuvent être représentées. Tu vas probablement vouloir « travailler à rebours » en utilisant ce que tu as appris dans les questions 3 et 4...

Extensions :

A. Il existe trois façons de représenter 90 $\mathbb{J}$ en utilisant ces billets et ces pièces de monnaie : en utilisant 18 pièces de monnaie, en utilisant 9 pièces de monnaie et 5 billets ou en utilisant 10 billets. (Pour passer d'une façon à l'autre, on a échangé 9 pièces de monnaie contre 5 billets, puisque ceux-ci ont la même valeur.) Combien y a-t-il de façons de représenter 900 $\mathbb{J}$ en utilisant ces billets et pièces de monnaie ?

B. Dans le pays voisin de Pnoll, les timbres sont émis pour des montants de 7 $\mathbb{K}$, 9 $\mathbb{K}$, et 11 $\mathbb{K}$. Quel est le montant le plus élevé d'affranchissement qui ne peut pas être effectué à l'aide de ces timbres ?

Plus d'infos :

Consulte la page internet du CEMI à la maison, mardi 21 avril, pour une solution à Quelques pièces de monnaie.

CEMC at Home

Grade 9/10 - Tuesday, April 14, 2020
Some Loose Change - Solution

1. Since $23\ \mathbb{J} = 2 \times 9\ \mathbb{J} + 1 \times 5\ \mathbb{J}$, then we can can use 2 bills and 1 coin.

2. Since 2×9 is greater than 17, then to make 17 $\mathbb{J}$, we must use either zero bills or one bill.
   If zero 9 $\mathbb{J}$ bills are used, then the entire 17 $\mathbb{J}$ must be made using 5 $\mathbb{J}$ coins.
   Since 17 is not divisible by 5, this is not possible.
   If one 9 $\mathbb{J}$ bill is used, then the remaining 8 $\mathbb{J}$ must be made using 5 $\mathbb{J}$ coins.
   Since 8 is not divisible by 5, this is not possible.
   Therefore, it is not possible to make 17 $\mathbb{J}$ using these bills and coins.

3. We start with the combinations of coins and bills that make up each of 40 $\mathbb{J}$ through 44 $\mathbb{J}$, inclusive.
   If we add one 5 $\mathbb{J}$ coin to each of these combinations, we add 5 $\mathbb{J}$ to each total to get totals from 45 $\mathbb{J}$ through 49 $\mathbb{J}$, inclusive.
   We can summarize these in a table:

Amount (in $\mathbb{J}$)	# of 5 $\mathbb{J}$ coins	# of 9 $\mathbb{J}$ bills
40	8	0
41	1	4
42	3	3
43	5	2
44	7	1
45	9	0
46	2	4
47	4	3
48	6	2
49	8	1

4. Adding one 5 $\mathbb{J}$ coin to each of the combinations that make five consecutive amounts (like 40 $\mathbb{J}$ to 44 $\mathbb{J}$) allows us to make the next five consecutive amounts (in this case, 45 $\mathbb{J}$ to 49 $\mathbb{J}$).
   Because we can continue to do this indefinitely, we can make any amount that is at least 40 $\mathbb{J}$.
   Given any such amount, can you describe a quick way to determine a number of bills and coins that can be used to make this amount?

5. The table below shows that we can make each amount from 32 $\mathbb{J}$ to 36 $\mathbb{J}$, inclusive:

Amount (in $\mathbb{J}$)	# of 5 $\mathbb{J}$ coins	# of 9 $\mathbb{J}$ bills
32	1	3
33	3	2
34	5	1
35	7	0
36	0	4

   Repeating the argument from 4., this table shows that we can in fact make every amount that is at least 32 $\mathbb{J}$.

It is impossible to make 31 $\mathbb{J}$ using only these coins and bills. (Can you modify the argument from 2. to show this?)
Since we cannot make 31 $\mathbb{J}$ and we can make every amount that is at least 32 $\mathbb{J}$, then 31 $\mathbb{J}$ is the largest amount that we cannot make using these bills and coins.

Extensions:

A. We can make 900 $\mathbb{J}$ using 100 bills and 0 coins.
Since 5 bills and 9 coins have the same value, we can trade 5 bills for 9 coins.
This means that we can make 900 $\mathbb{J}$ using 95 bills and 9 coins.
How many times can you repeat this process before no further trades are possible?

B. Try working with just 7 $\mathbb{K}$ and 9 $\mathbb{K}$ stamps first and work through similar steps to 3., 4., and 5. from earlier.
Once you know the largest amount that cannot be made with just 7 $\mathbb{K}$ and 9 $\mathbb{K}$ stamps, try introducing 11 $\mathbb{K}$ stamps to see what amounts that you previously couldn't make can now be made.

CEMI à la maison

9e et 10e année - mercredi 15 avril 2020
Retourner des verres d'eau

Dans cette activité, on retourne des verres d'eau selon un ensemble de règles afin d'atteindre certains objectifs.

Matériel : Trois verres d'eau vides.

Règles :

— ***On doit retourner deux verres adjacents à chaque tour.***
— On obtient un verre d'eau à l'envers lorsqu'on retourne un verre d'eau à l'endroit.
— On obtient un verre d'eau à l'endroit lorsqu'on retourne un verre d'eau à l'envers.

à l'endroit **à l'envers**

Activités :

1. Arrangez vos trois verres comme dans la figure ci-contre. Tout en respectant les règles énoncées ci-dessus, est-il possible de retourner les verres de manière qu'ils soient tous à l'endroit ? Si oui, combien de tours faut-il ?

2. Au départ, il y a huit arrangements de positions différentes pour les trois verres.
   (a) On voit deux tels arrangements dans le tableau ci-dessous. Complétez le reste du tableau.

   (b) Tout en respectant les règles, à partir duquel (ou desquels) des huit arrangements de départ est-il possible de retourner les verres de manière que les trois verres soient tous à l'endroit ?
   (c) Dans la partie (b), que remarquez-vous à propos du nombre initial de verres à l'envers dans les scénarios où vous *pouvez* retourner les trois verres afin qu'ils soient tous à l'endroit ?

Extension : Dans la figure ci-contre, on voit huit verres dans un arrangement spécifique. Tout en respectant les règles, est-il possible de retourner les verres de manière qu'ils soient tous à l'endroit ?

Plus d'infos :

Consultez la page du CEMI à la maison jeudi, le 22 avril, pour la solution à ce problème.

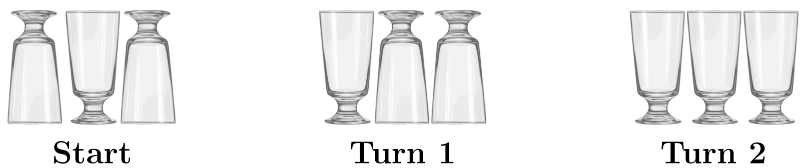
Vous pouvez modéliser vos solutions à l'aide d'un *automate fini* des mêmes manières que dans la question *Glasses* du défi informatique Beaver de 2012 et dans la ressource *Où suis-je* du 1 avril du CEMI à la maison.

CEMC at Home

Grade 9/10 - Wednesday, April 15, 2020
Flipping Glasses - Solution

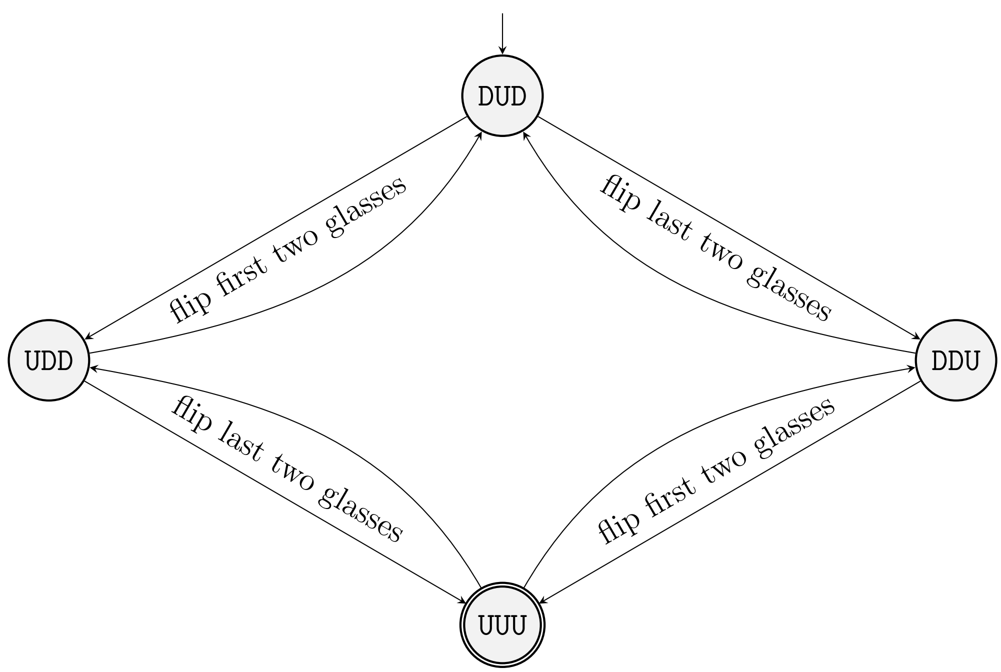
1. It is possible to flip the three glasses in two turns so that all three glasses are facing up.

   Here are images describing one possible solution:



   To visualize the transformation of the glasses after each turn (i.e. facing up or down), we can use a *finite state machine*:

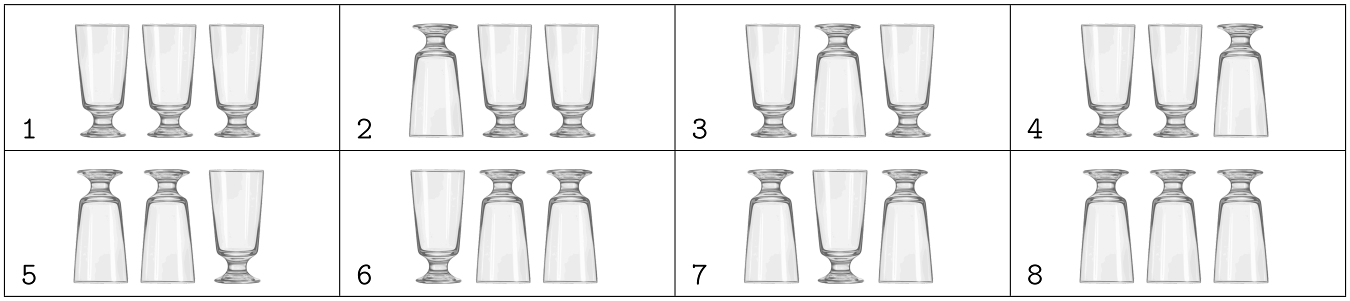
   - Each circle represents a possible *state* of the three glasses, where `D` represents a glass facing down and `U` represents a glass facing up.
   - The *starting state* is the circle with the arrow "out of nowhere" pointing to it (`DUD`).
   - To *transition* between states, follow an arrow by performing the action describing it.
   - The desired state is the circle with the double border around it (*final state*).



From the diagram above, we see that there are two different ways to arrive at the desired state (`UUU`) in exactly two turns (or two transitions from the starting state). One of these two solutions was outlined earlier (using images).

Note: If we flip the first and the third glass from the starting state, this would also result in the desired state of `UUU`. However, this is not a valid transition since these glasses are *not* adjacent.

2. (a) Here are the eight different starting positions for the three glasses.



(b) You are able to flip all three glasses so that they are facing up only if you start with position `1`, `5`, `6`, or `7`. Starting position `1` already has all three glasses facing up, so we don't have to do anything. In question 1, we showed that the glasses starting in position `7` can be flipped so that all three glasses are facing up. Positions `5` and `6` can be flipped to `UUU` in one turn. Another way to think about this is to notice that states `1`, `5`, `6`, and `7` are exactly the states in the finite state machine from Question 1. By following arrows, it is possible to move between any two of these four states. In particular, it is possible to get from any of states `5`, `6`, and `7` to state `1`.

You may have also figured out that it is impossible to reach `UUU` from the starting states `2`, `3`, `4`, or `8`. An explanation of this will be provided in part (c).

(c) In each of the starting positions for which it is possible to flip the glasses so that all three are facing up, there are either 0 or 2 glasses facing down.

On each turn, two adjacent glasses are flipped causing one of the following three outcomes:

* If the two glasses were facing down, the number of glasses facing up increases by two.
* If the two glasses were facing up, the number of glasses facing up decreases by two.
* If one glass was facing up and the other was facing down, the number of glasses facing up does not change.

Therefore, on each turn, the number of glasses facing down either increases by two, decreases by two, or stays the same. A consequence of this is that if the number of glasses facing down at the beginning is odd, then the number of glasses facing down will always be odd, and hence can never be 0.

In starting positions `2`, `3`, `4`, and `8`, an odd number of glasses are facing down. This means that no sequence of valid flips can change any of them to the state `UUU` (which has 0 glasses facing down). Put differently, a state must have an even number of glasses facing down for there to be a chance to change it to `UUU`. In part (b), we we confirmed that it is actually possible to do this for all states starting with an even number of glasses facing down.

Extension: It is not possible to have all eight glasses facing up. We can generalize our reasoning from 2(c) beyond three glasses. The observation at the end of part (c) is true for any number of glasses. That is, if there are an odd number of glasses facing down at the beginning, then there will always be an odd number of glasses facing down. Since we start with an odd number of glasses (five) facing down, the number of glasses facing down will always be odd, and hence will never be 0. At best, we can reach a state where 1 glass is facing down and 7 glasses are facing up. Can you convince yourself that it is indeed possible to reach a state where exactly one glass is facing down?

Le CEMI à la maison présente Le problème de la semaine

9e et 10e année - jeudi 16 avril 2020
Des Ps, des Qs et des Rs

Des nombres à trois chiffres, PQR, QQP et PQQ sont formés en utilisant les chiffres P, Q et R de façon à ce que :

$$PQR + 2 = PQQ$$

et

$$PQR \times 2 = QQP$$

Détermine toutes les valeurs possibles de P, Q et R qui vont satisfaire les deux équations.

Plus d'infos :

Consulte la page du CEMI à la maison, jeudi 23 avril, pour la solution à ce problème.
Tu peux également t'inscrire au Problème de la semaine en cliquant sur le lien ci-dessous et recevoir la solution ainsi qu'un nouveau problème, par courriel, jeudi 23 avril.

Cette ressource du CEMI à la maison correspond au Problème de la semaine pour les 9e et 10e années. Le Problème de la semaine est une ressource gratuite. Chaque semaine, des problèmes provenant de divers domaines mathématiques sont publiés en ligne et envoyés par courriel aux enseignants afin qu'ils les utilisent avec leurs étudiants. Les problèmes sont disponibles pour les étudiants de la 3e jusqu'à la 12e année. Les solutions aux problèmes sont envoyées une semaine après, en même temps que le nouveau Problème de la semaine.

Pour plus d'informations et t'inscrire au Problème de la semaine, rendez-vous sur : https://www.cemc.uwaterloo.ca/resources/potw-f.php

Problem of the Week
Problem D and Solution
Mind Your Ps and Qs and Rs

Problem

The letters P, Q, and R represent single digits. Determine all possible combinations of values of P, Q and R, given that: $PQR + 2 = PQQ$ and $PQR \times 2 = QQP$

Solution

From $PQR + 2 = PQQ$, we note that the number PQQ is 2 more than the number PQR and that the first two digits of each number are the same. From this, $Q = R + 2$ follows. We can prove this using place value. The number $PQR = 100 \times P + 10 \times Q + R = 100P + 10Q + R$. The number $PQQ = 100 \times P + 10 \times Q + Q = 100P + 10Q + Q$.
Then,

$$\begin{aligned}
(100P + 10Q + R) + 2 &= 100P + 10Q + Q \\
100P + 10Q + R + 2 &= 100P + 11Q \\
R + 2 &= Q, \text{ as above.}
\end{aligned}$$

From this expression we can obtain a restriction on the possible integer values of R. R must be an integer from 0 to 7, inclusive. If $R = 8$, then $R = Q + 2 = 10$ and Q is not a single digit.

From here, we will show two possible solutions.

Solution 1

Representing $PQR \times 2 = QQP$ using place value,

$$\begin{aligned}
(100P + 10Q + R) \times 2 &= 100Q + 10Q + P \\
200P + 20Q + 2R &= 110Q + P \\
199P &= 90Q - 2R \\
\text{Substituting } R + 2 \text{ for } Q: \qquad 199P &= 90(R + 2) - 2R \\
199P &= 90R + 180 - 2R \\
P &= \frac{88R + 180}{199}
\end{aligned}$$

We are looking for an integer value of R from 0 to 7 such that $88R + 180$ is a multiple of 199. The only value of R that produces a multiple of 199 when substituted into $88R + 180$ is $R = 7$. When $R = 7$, $P = \frac{88R+180}{199} = \frac{88(7)+180}{199} = 4$ and $Q = R + 2 = 9$.

Therefore, the only values that satisfy the system of equations are $P = 4$, $Q = 9$ and $R = 7$.

We can verify this result:

$$PQR + 2 = 497 + 2 = 499 = PQQ \text{ and}$$

$$PQR \times 2 = 497 \times 2 = 994 = QQP.$$

Solution 2

If R must be an integer from 0 to 7, inclusive, then Q must be an integer from 2 to 9, inclusive.
From the second equation, we also know that P would be the units digit of $2R$.
We can now use a table to determine all possible values for P , Q and R

Q	R	$2R$	P	PQR	QQP	Does $2 \times PQR = QQP$?
2	0	0	0	020	220	No
3	1	2	2	231	332	No
4	2	4	4	442	444	No
5	3	6	6	653	556	No
6	4	8	8	864	668	No
7	5	10	0	075	770	No
8	6	12	2	286	882	No
9	7	14	4	497	994	Yes

We will now need to verify that the final row also works for $PQR + 2 = PQQ$.

$$PQR + 2 = 497 + 2 = 499 = PQQ.$$

Therefore, the only values that satisfy the system of equations are $P = 4$, $Q = 9$ and $R = 7$.

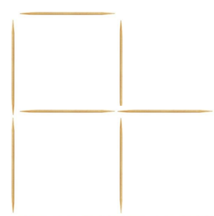
Le CEMI à la maison

9e et 10e année - vendredi 17 avril 2020
Défis de cure-dents

Dans les puzzles de cure-dents suivants, on te présente des cure-dents ainsi que des instructions à suivre. Ta tâche consiste à arranger, à réarranger ou à retirer des cure-dents afin d'obtenir le résultat souhaité.

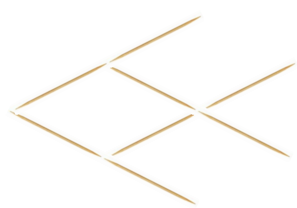
Exemple

Dans la figure ci-dessous, on voit 10 cure-dents dont la disposition crée 3 carrés. Crée une figure qui contient exactement 2 carrés en déplaçant 2 cure-dents. (La solution se trouve sur la deuxième page.)



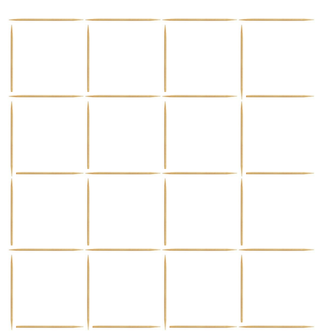
Inverser le poisson

Dans la figure ci-dessous, on voit 8 cure-dents dont la disposition crée un poisson orienté vers la gauche. Crée un poisson identique dont l'orientation est vers la droite en déplaçant seulement 3 cure-dents.



Supprimer des carrés

Dans la figure ci-dessous, on voit 40 cure-dents dont la disposition crée un quadrillage 4×4. On remarque que ce quadrillage contient de nombreux carrés de différentes tailles. Retire exactement 9 cure-dents afin qu'il ne reste aucun carré de quelconque taille.



Peux-tu compter le nombre total de carrés dans cette figure ? Indice : Il y en a plus que 17.

Triangles

Crée exactement 4 triangles équilatéraux en utilisant exactement 6 cure-dents. Chacun des côtés des triangles doit avoir une longueur égale à celle d'un cure-dent.

Indice : Ta solution ne pourra être posée à plat.

Solution à l'exemple

On a donc deux carrés ; soit un grand carré 4×4 et un petit carré 1×1.

Plus d'infos :

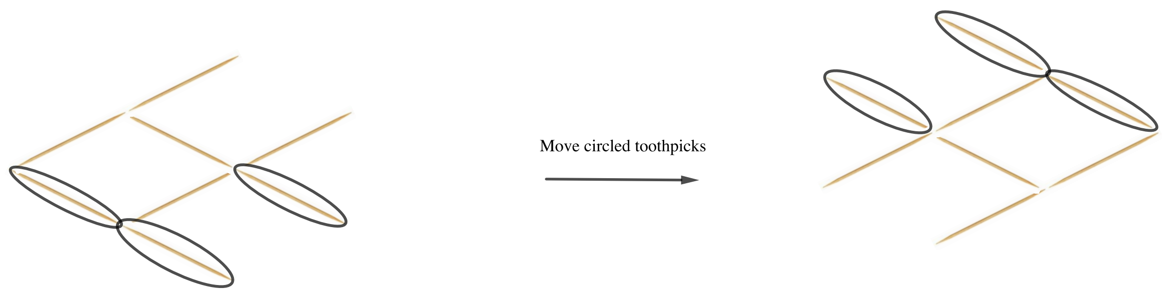
Consulte la page du CEMI à la maison vendredi, le 24 avril, pour la solution à ce problème.

CEMC at Home

Grade 9/10 - Friday, April 17, 2020
Toothpick Challenges - Solutions

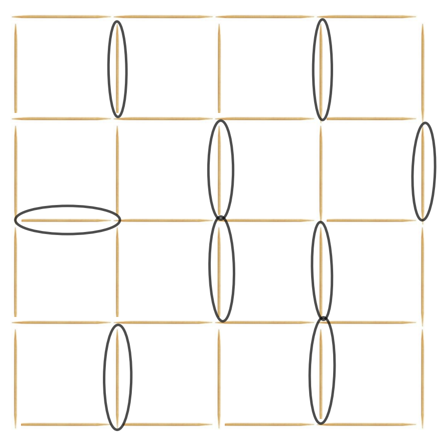
Reversing Fish

Move the circled toothpicks to their corresponding places noted.



Many Squares to No Squares

Remove the circled toothpicks.



Triangles

Make a triangular based pyramid. (A regular tetrahedron.)