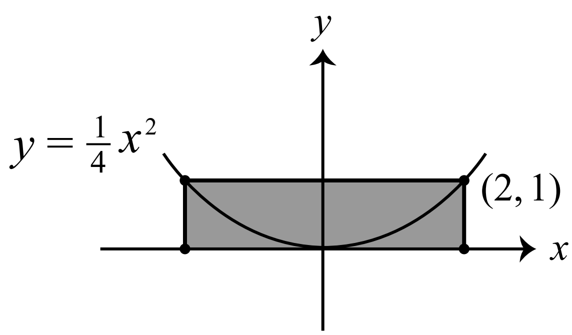
Le CEMI à la maison

11e et 12e année - le lundi 1er juin 2020
Concours - jour 5

La ressource d'aujourd'hui présente deux questions des concours mathématiques 2020 du CEMI.

Concours Hypatie 2020, nº 2

La parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$ a l'origine comme sommet et l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Pour n'importe quel point (p, q) situé sur la parabole (et n'étant pas situé à l'origine), on peut tracer un *rectangle parabolique*. Ce rectangle aura un sommet situé au point (p, q), un deuxième sommet situé sur la parabole et deux autres sommets situés sur l'axe des abscisses. Dans la figure ci-après, on voit un rectangle parabolique dont l'aire est égale à 4.



(a) Un rectangle parabolique a un sommet situé au point $(6, 9)$. Quelles sont les coordonnées de ses trois autres sommets ?

(b) Un rectangle parabolique a un sommet situé au point $(-3, 0)$. Quelle est son aire ?

(c) Déterminer les aires des deux rectangles paraboliques qui ont des côtés de longueur 36.

(d) Déterminer l'aire du rectangle parabolique dont la longueur et la largeur sont égales.

Plus d'infos :

Consulte la page internet du CEMI à la maison lundi, le 8 juin, pour les solutions aux problèmes de Concours - Jour 5.

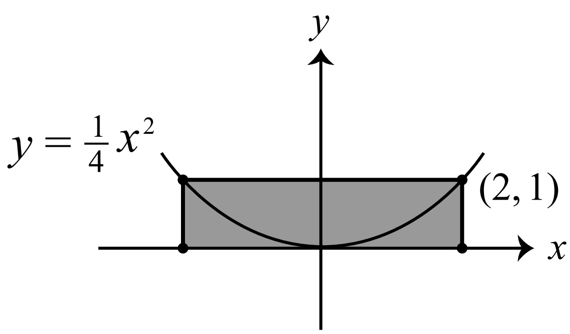
Le CEMI à la maison

11e et 12e année - le lundi 1er juin mai 2020
Concours jour 5 - solutions

Voici la solution au problème de concours.

Concours Hypatie 2020, n° 2

La parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$ a l'origine comme sommet et l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Pour n'importe quel point (p, q) situé sur la parabole (et n'étant pas situé à l'origine), on peut tracer un *rectangle parabolique*. Ce rectangle aura un sommet situé au point (p, q), un deuxième sommet situé sur la parabole et deux autres sommets situés sur l'axe des abscisses. Dans la figure ci-après, on voit un rectangle parabolique dont l'aire est égale à 4.



(a) Un rectangle parabolique a un sommet situé au point $(6, 9)$. Quelles sont les coordonnées de ses trois autres sommets ?

(b) Un rectangle parabolique a un sommet situé au point $(-3, 0)$. Quelle est son aire ?

(c) Déterminer les aires des deux rectangles paraboliques qui ont des côtés de longueur 36.

(d) Déterminer l'aire du rectangle parabolique dont la longueur et la largeur sont égales.

Solution :

(a) Puisque la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$ et le rectangle parabolique ont tous deux l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, alors le rectangle parabolique aura un deuxième sommet situé sur la parabole dont les coordonnées sont $(-6, 9)$.
Un troisième sommet du rectangle parabolique est situé au point où la droite verticale menée de $(6, 9)$ à l'axe des abscisses coupe ce dernier. Ce point a donc pour coordonnées $(6, 0)$.
De même, un quatrième sommet du rectangle parabolique est situé au point où la droite verticale menée de $(-6, 9)$ à l'axe des abscisses coupe ce dernier. Ce point a donc pour coordonnées $(-6, 0)$.

(b) Si l'un des sommets d'un rectangle parabolique a pour coordonnées $(-3, 0)$, alors un deuxième sommet a pour coordonnées $(3, 0)$, d'où le rectangle a donc une longueur de 6.
Le sommet situé directement au-dessus de $(3, 0)$ a une abscisse de 3.
Ce sommet est situé sur la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$ et a donc une ordonnée égale à $\frac{1}{4}(3)^2 = \frac{9}{4}$.
La largeur du rectangle est donc égale à $\frac{9}{4}$. Donc, le rectangle parabolique ayant un sommet situé au point $(-3, 0)$ a une aire égale à $6 \times \frac{9}{4} = \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$.

(c) Soit $(p, 0)$ un sommet du rectangle parabolique, p étant une valeur qui vérifie $p > 0$.
Un deuxième sommet (également situé sur l'axe des abscisses) a donc pour coordonnées $(-p, 0)$.
Le rectangle a donc une longueur de $2p$.
Le troisième sommet du rectangle parabolique est situé au point où la droite verticale menée de $(p, 0)$ à la parabole coupe cette dernière ; la largeur du rectangle est donc égale à l'ordonnée de ce point, soit une largeur égale à $\frac{1}{4}p^2$.
Donc, un rectangle parabolique de longueur $2p$ et de largeur $\frac{1}{4}p^2$ a une aire égale à $2p \times \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{2}p^3$.
Si un tel rectangle parabolique avait une longueur de 36, alors $2p = 36$, d'où $p = 18$.
Ce rectangle aurait donc une aire de $\frac{1}{2}(18)^3 = 2916$.
Si un tel rectangle parabolique avait une largeur de 36, alors $\frac{1}{4}p^2 = 36$ ou $p^2 = 144$, d'où $p = 12$ (puisque $p > 0$).
Ce rectangle aurait donc une aire de $\frac{1}{2}(12)^3 = 864$.
Les deux rectangles paraboliques ayant des côtés de longueur 36 ont donc des aires de 2916 et 864.

(d) Soit $(m, 0)$ un sommet du rectangle parabolique, m étant une valeur qui vérifie $m > 0$.
Un deuxième sommet (également situé sur l'axe des abscisses) a donc pour coordonnées $(-m, 0)$. Le rectangle a donc une longueur de $2m$.
Le troisième sommet du rectangle parabolique est situé au point où la droite verticale menée de $(m, 0)$ à la parabole coupe cette dernière ; la largeur du rectangle est donc égale à l'ordonnée de ce point, soit une largeur égale à $\frac{1}{4}m^2$.
Donc, un rectangle parabolique de longueur $2m$ et de largeur $\frac{1}{4}m^2$ a une aire égale à $2m \times \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{2}m^3$.
Si la longueur et la largeur d'un tel rectangle parabolique sont égales, alors

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}m^2 &= 2m \\ m^2 &= 8m \\ m^2 - 8m &= 0 \\ m(m-8) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $m = 8$ (puisque $m > 0$). Donc, un rectangle parabolique dont la longueur et la largeur sont égales a une aire de $\frac{1}{2}(8)^3 = 256$.