Le CEMI à la maison

11e et 12e année - le lundi 8 juin 2020
Concours - jour 6

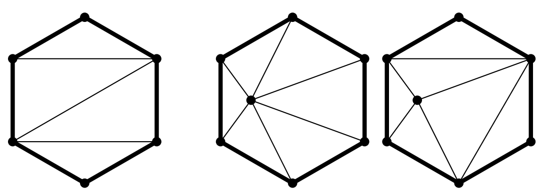
La ressource d'aujourd'hui présente une question des concours mathématiques 2020 du CEMI.

Concours Hypatie 2020, nº 3

Une *triangulation* d'un polygone régulier est une division de son intérieur en régions triangulaires. Dans une telle division, chaque sommet de chaque triangle est soit un sommet du polygone soit un point situé à l'intérieur du polygone. Dans la triangulation d'un polygone régulier qui possède $n \geq 3$ sommets et qui a $k \geq 0$ points en son intérieur (sans que trois de ces $n + k$ points soient situés sur la même droite),

- les segments de droites reliant les couples de ces points ne se coupent deux à deux qu'aux extrémités et
- chaque point à l'intérieur du polygone est le sommet d'au moins une des régions triangulaires.

Chaque polygone régulier a au moins une triangulation. Toutes les triangulations possibles d'un polygone qui possède n sommets et qui a k points en son intérieur produiront le même nombre de régions triangulaires. De plus, ce nombre de régions triangulaires est représenté par $T(n, k)$. Par exemple, exactement 6 régions triangulaires seront produites par chacune des triangulations possibles d'un hexagone régulier qui a 1 point en son intérieur. C'est-à-dire, $T(6, 1) = 6$.



$T(6, 0) = 4$ $\quad$ $T(6, 1) = 6$

(a) Quelle est la valeur de $T(3, 2)$?

(b) Déterminer la valeur de $T(4, 100)$.

(c) Déterminer toutes les valeurs possibles de n pour lesquelles $T(n, n) = 2020$..

Plus d'infos :

Consulte la page internet du CEMI à la maison lundi, le 15 juin, pour les solutions aux problèmes de Concours - Jour 6.

Le CEMI à la maison

11e et 12e année - le lundi 8 juin 2020
Concours, jour 6 - solutions

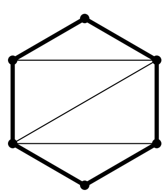
Voici la solution au problème de concours.

Concours Hypatie 2020, n° 3

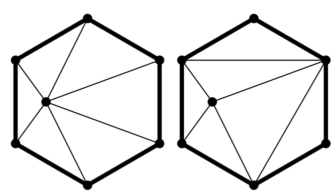
Une *triangulation* d'un polygone régulier est une division de son intérieur en régions triangulaires. Dans une telle division, chaque sommet de chaque triangle est soit un sommet du polygone soit un point situé à l'intérieur du polygone. Dans la triangulation d'un polygone régulier qui possède $n \geq 3$ sommets et qui a $k \geq 0$ points en son intérieur (sans que trois de ces $n + k$ points soient situés sur la même droite),

- les segments de droites reliant les couples de ces points ne se coupent deux à deux qu'aux extrémités et
- chaque point à l'intérieur du polygone est le sommet d'au moins une des régions triangulaires.

Chaque polygone régulier a au moins une triangulation. Toutes les triangulations possibles d'un polygone qui possède n sommets et qui a k points en son intérieur produiront le même nombre de régions triangulaires. De plus, ce nombre de régions triangulaires est représenté par $T(n, k)$. Par exemple, exactement 6 régions triangulaires seront produites par chacune des triangulations possibles d'un hexagone régulier qui a 1 point en son intérieur. C'est-à-dire, $T(6, 1) = 6$.



$T(6, 0) = 4$



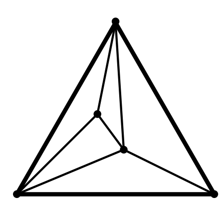
$T(6, 1) = 6$

(a) Quelle est la valeur de $T(3, 2)$?

(b) Déterminer la valeur de $T(4, 100)$.

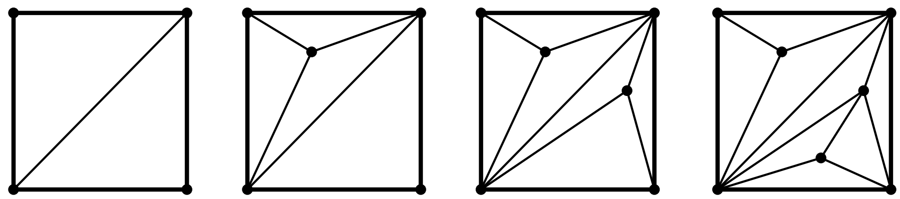
(c) Déterminer toutes les valeurs possibles de n pour lesquelles $T(n, n) = 2020$.

Solution :



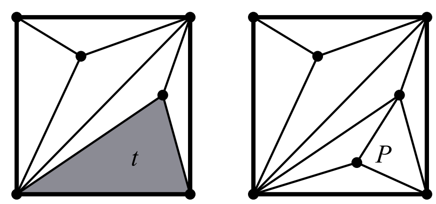
(a) Lorsque $n \geq 3$ et $k \geq 0$, la valeur de $T(n, k)$ est constante pour tous les emplacements possibles des k points situés à l'intérieur du polygone et pour tous les triangulations possibles.
À l'aide de la triangulation dans la figure ci-contre, on peut donc déterminer que $T(3, 2) = 5$.

(b) On commence d'abord en dessinant des triangulations pour déterminer les valeurs de $T(4, k)$ lorsque $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$



$T(4,0)=2$ $T(4,1)=4$ $T(4,2)=6$ $T(4,3)=8$

Bien qu'on obtiendrait ces quatre mêmes réponses peu importe les emplacements des points situés à l'intérieur du quadrilatère (que l'on surnommera désormais « points intérieurs ») ou les manières dont les triangulations ont été créées, les diagrammes ci-dessus ont été créés pour nous aider à visualiser une régularité.
À partir des réponses, on voit que $T(4, k + 1) = T(4, k) + 2$ lorsque $k = 0, 1, 2$.
Il faut justifier pourquoi cette observation est vraie pour tous les entiers k ($k \geq 0$) afin qu'on puisse utiliser ce résultat pour déterminer la valeur de $T(4, 100)$.
Remarquez que chaque triangulation après la première a été créée en plaçant un nouveau point intérieur dans la triangulation précédente.
De plus, puisque chaque carré est divisé en triangles, alors chaque nouveau point intérieur est placé *dans* un triangle de la triangulation précédente (puisque 3 points ne peuvent être situés sur la même droite).
Par exemple, on voit dans les figures ci-contre que P est situé à l'intérieur du triangle t de la triangulation précédente.
De plus, chacun des triangles autre que t n'est pas affecté par l'ajout de P. Donc ces triangles contribuent le même nombre de triangles (5) à la valeur de $T(4, 3)$ qu'ils ne contribuaient à la valeur de $T(4, 2)$.
Le triangle t contribue 1 à la valeur de $T(4, 2)$.



$T(4,2)=6$ $T(4,3)=8$

Afin de diviser t en région triangulaires, on joint P à chacun des 3 sommets du triangle t (aucune autre triangulation de cette région n'est possible).
Donc, l'emplacement de P (peu importe son emplacement précis à condition qu'il soit situé à l'intérieur de t et non sur un bord) divise le triangle t en 3 triangles.
C'est-à-dire que t contribue 1 à la valeur de $T(4, 2)$, tandis que la région définie par t contribue 3 à la valeur de $T(4, 3)$ après qu'on ait placé P.

En résumé, la valeur de $T(4, k + 1)$ est 2 de plus que la valeur de $T(4, k)$ pour tous les entiers k ($k \geq 0$) car :
— le $(k + 1)^e$ point intérieur peut être placé n'importe où dans la triangulation de $T(4, k)$ (à condition qu'il ne soit pas sur un bord)
— plus précisément, le $(k + 1)^e$ point intérieur est situé à l'intérieur d'un triangle dans la triangulation de $T(4, k)$
— ce triangle contribuait 1 à la valeur de $T(4, k)$
— après qu'on ait placé le $(k + 1)^e$ point intérieur à l'intérieur de ce triangle et qu'on l'ait relié à chacun des 3 sommets du triangle, cette région contribue maintenant 3 à la valeur de $T(4, k + 1)$
— soit une augmentation nette de 2 triangles, donc $T(4, k + 1) = T(4, k) + 2$ pour tous les entiers k ($k \geq 0$).

$T(4,0) = 2$ et le nombre de triangles augmente de 2 pour chaque point intérieur supplémentaire.
Donc, le nombre de triangles augmente de $2k$ pour k points intérieurs supplémentaires, d'où on a donc $T(4,k) = T(4,0) + 2k = 2 + 2k$ pour tous les entiers k $(k \geq 0)$.
D'après cette formule, on obtient donc $T(4,100) = 2 + 2(100) = 202$.

(c) Dans la triangulation d'un polygone régulier à n sommets comprenant aucun point intérieur, on peut choisir de relier l'un des n sommets à chacun des $n-3$ sommets restants qui ne lui sont pas adjacents.
Toutes telles triangulations de tels polygones réguliers sont composées de $n-2$ triangles, d'où $T(n,0) = n-2$ pour tous les entiers n $(n \geq 3)$ (puisque $T(n,0)$ est constant).
Le raisonnement dans la partie (b) s'applique à tout polygone régulier ayant $n \geq 3$ sommets.
C'est-à-dire que chaque point intérieur supplémentaire qui est ajouté à la triangulation de $n \geq 3$ sommets et $k \geq 0$ points intérieurs résulte en une augmentation nette de 2 triangles.
Donc, $T(n,k+1) = T(n,k) + 2$ pour tous les polygones réguliers ayant $n \geq 3$ sommets et $k \geq 0$ points intérieurs.
Donc, le nombre de triangles augmente de $2k$ pour k points intérieurs supplémentaires, d'où on a donc $T(n,k) = T(n,0) + 2k = (n-2) + 2k$ pour tous les entiers k $(k \geq 0)$.
D'après cette formule $T(n,k) = (n-2) + 2k$, on obtient donc $T(n,n) = (n-2) + 2n = 3n-2$ et $3n-2 = 2020$ lorsque $n = \frac{2022}{3} = 674$.