Le CEMI à la maison

9e et 10e année - le lundi 8 juin 2020
Concours - jour 6

La ressource d'aujourd'hui présente une question des concours mathématiques 2020 du CEMI.

Concours Fryer 2020, nº 3

Une *suite Dlin* est une suite dont le premier terme est un entier strictement positif et dont chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant 1 au terme précédent et en doublant ce résultat. Par exemple, les sept premiers termes d'une suite Dlin de premier terme 4 sont :

$$4,\ 10,\ 22,\ 46,\ 94,\ 190,\ 382$$

(a) Le 5^{e} terme d'une suite Dlin est 142. Quels sont les 4^{e} et 6^{e} termes de cette suite ?

(b) Déterminer tous les premiers termes possibles de suites Dlin dans lesquelles 1406 paraît comme terme.

(c) Lesquels des entiers strictement positifs, de 10 à 19, pourraient être les premiers termes d'une suite Dlin dont tous les termes, après le premier, ont le même chiffre des unités ?

(d) Combien des entiers strictement positifs, de 1 à 2020, pourraient être le troisième terme dans une suite Dlin ?

Plus d'infos :

Consulte la page internet du CEMI à la maison lundi, le 15 juin, pour la solution au problème de Concours Jour 6.

Le CEMI à la maison

9e et 10e année - le lundi 8 juin 2020
Concours, Jour 6 - solutions

Voici la solution au problème de concours.

Concours Fryer 2020, nº 3

Une *suite Dlin* est une suite dont le premier terme est un entier strictement positif et dont chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant 1 au terme précédent et en doublant ce résultat. Par exemple, les sept premiers termes d'une suite Dlin de premier terme 4 sont :

$$4,\ 10,\ 22,\ 46,\ 94,\ 190,\ 382$$

(a) Le 5$^{\text{e}}$ terme d'une suite Dlin est 142. Quels sont les 4$^{\text{e}}$ et 6$^{\text{e}}$ termes de cette suite ?

(b) Déterminer tous les premiers termes possibles de suites Dlin dans lesquelles 1406 paraît comme terme.

(c) Lesquels des entiers strictement positifs, de 10 à 19, pourraient être les premiers termes d'une suite Dlin dont tous les termes, après le premier, ont le même chiffre des unités ?

(d) Combien des entiers strictement positifs, de 1 à 2020, pourraient être le troisième terme dans une suite Dlin ?

Solution :

(a) Si le 5$^{\text{e}}$ terme d'une suite Dlin est 142, alors le 6$^{\text{e}}$ terme est $(142 + 1) \times 2 = 143 \times 2 = 286$.

Puisqu'on obtient chaque terme après le premier en ajoutant 1 au terme précédent et en doublant ce résultat alors, ayant le 5$^{\text{e}}$ terme de la suite, on peut faire « marche arrière » en divisant d'abord le 5$^{\text{e}}$ terme par 2 puis en soustrayant 1 de ce résultat afin d'obtenir le 4$^{\text{e}}$ terme de la suite.

Pour le voir, considérons deux termes consécutifs dans une suite Dlin, soit a suivi de b, qui vérifient donc $b = (a + 1) \times 2$.

Pour déterminer les opérations nécessaires pour obtenir a étant donné b (c'est-à-dire pour reculer dans la suite), on isole a dans l'équation afin d'exprimer ce dernier en fonction de b :

$$\begin{aligned} b &= (a+1) \times 2 \\ \tfrac{b}{2} &= a + 1 \\ \tfrac{b}{2} - 1 &= a \end{aligned}$$

Donc, si le 5$^{\text{e}}$ terme de la suite Dlin est 142, alors le 4$^{\text{e}}$ terme est $\frac{142}{2} - 1 = 71 - 1 = 70$.
(On peut vérifier que 142 est bien le terme après 70 : $(70 + 1) \times 2 = 142$.)

(b) Si le 1$^{\text{er}}$ terme de la suite est 1406, alors on a clairement une suite Dlin dans laquelle 1406 parait comme terme.

Si le 2$^{\text{e}}$ terme d'une suite Dlin est 1406, alors le 1$^{\text{er}}$ terme de la suite est $\frac{1406}{2} - 1 = 703 - 1 = 702$.

Si le 3$^{\text{e}}$ terme d'une suite Dlin est 1406, alors le 2$^{\text{e}}$ terme est 702 (ce qu'on a calculé dans la ligne précédente) et le 1$^{\text{er}}$ terme de la suite est $\frac{702}{2} - 1 = 351 - 1 = 350$.

Si le 4$^{\text{e}}$ terme d'une suite Dlin est 1406, alors le 3$^{\text{e}}$ terme est 702, le 2$^{\text{e}}$ terme est 350 et le 1$^{\text{er}}$ terme de la suite est $\frac{350}{2} - 1 = 175 - 1 = 174$.

À ce point, on voit que 174, 350, 702 et 1406 sont des 1er termes possibles de suites Dlin dans lesquelles 1406 parait comme terme.
On peut continuer ce processus de « marche arrière » (en divisant par 2 puis en soustrayant 1 du résultat) pour déterminer tous les 1er termes possibles de suites Dlin dans lesquelles 1406 parait comme terme.

$$1406 \to 702 \to 350 \to 174 \to \frac{174}{2} - 1 = 86 \to \frac{86}{2} - 1 = 42 \to \frac{42}{2} - 1 = 20 \to \frac{20}{2} - 1 = 9$$

Si l'on tente de poursuivre ce processus au-delà de 9, on obtient $\frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$. Or, ce dernier n'est pas possible car le 1er terme d'une suite Dlin doit être un entier strictement positif (d'où chacun des termes de la suite est donc un entier strictement positif).
Donc, 9, 20, 42, 86, 174, 350, 702 et 1406 sont les 1er termes possibles de suites Dlin dans lesquelles 1406 parait comme terme.

(c) Chacun des entiers de 10 à 19 peut être le premier terme d'une suite Dlin. Donc, pour chacun de ces dix premiers termes possibles, on doit déterminer le chiffre des unités des termes qui suivent.
Si le 1er terme de la suite est 10, alors le 2e terme, $(10 + 1) \times 2 = 22$, a 2 comme chiffre des unités tandis que le 3e terme, $(22 + 1) \times 2 = 46$, a 6 comme chiffre des unités.
Si le 1er terme de la suite est 11, alors le 2e terme, $(11 + 1) \times 2 = 24$, a 4 comme chiffre des unités tandis que le 3e terme, $(24 + 1) \times 2 = 50$, a 0 comme chiffre des unités.
On dresse la liste des chiffres des unités des 2e et 3e termes pour chacun des premiers termes possibles dans le tableau ci-dessous :

1er terme	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Chiffre des unités du 2e terme	2	4	6	8	0	2	4	6	8	0
Chiffre des unités du 3e terme	6	0	4	8	2	6	0	4	8	2

D'après le tableau ci-dessus, on voit que 8 est le seul chiffre des unités que les 2e et 3e termes peuvent avoir en commun.
Donc, si le 1er terme de la suite est 18 (ayant donc un 8 comme chiffre des unités), alors les 2e et 3e termes de la suite ont 8 comme chiffre des unités. Donc, tous les termes ont le même chiffre des unités.
De même, si le 1er terme de la suite est 13 (ayant donc un 3 comme chiffre des unités), alors les 2e et 3e termes de la suite ont 8 comme chiffre des unités.
Il s'ensuit donc que tous les autres termes après le premier auront 8 comme chiffre des unités.
Parmi les entiers strictement positifs de 10 à 19, 13 et 18 sont ceux qui pourraient être les premiers termes d'une suite Dlin dont tous les termes, après le premier, ont le même chiffre des unités.

(d) Si le 1er terme d'une suite Dlin est x, alors le 2e terme est $(x + 1) \times 2 = 2x + 2$ tandis que le 3e terme est $(2x + 2 + 1) \times 2 = (2x + 3) \times 2 = 4x + 6$.
Par exemple, si $x = 1$ (remarquons qu'il s'agit du plus petit 1er terme possible d'une suite Dlin), alors le 3e terme est $4 \times 1 + 6 = 10$. De plus, si $x = 2$, alors le 3e terme est $4 \times 2 + 6 = 14$.
Quelle est la plus grande valeur possible de x (le 1er terme de la suite) telle que $4x + 6$ (le 3e terme de la suite) soit inférieur ou égal à 2020 ?
En posant $4x + 6 = 2020$ et en résolvant, on obtient $4x = 2014$, d'où $x = 503,5$.
Puisque le 1er terme de la suite doit être un entier strictement positif, on ne peut avoir 2020 comme 3e terme.
De même, en posant $4x + 6 = 2019$ et en résolvant, on obtient une valeur non entière de x. Donc, on ne peut avoir 2019 comme 3e terme d'une suite Dlin.

Lorsque $4x + 6 = 2018$, on obtient $4x = 2012$, d'où $x = 503$.
Donc, si le 1$^{\text{er}}$ terme d'une suite Dlin est 503, alors le 3$^{\text{e}}$ terme de la suite, soit 2018, est un entier strictement positif entre 1 et 2020.
De plus, 503 est le plus grand 1$^{\text{er}}$ terme possible tel que le 3$^{\text{e}}$ terme soit un entier strictement positif entre 1 et 2020.
Dans les suites Dlin, on obtient un 3$^{\text{e}}$ terme $(4x + 6)$ différent pour chaque premier terme distinct (x).
Donc, afin de déterminer combien des entiers strictement positifs de 1 à 2020 pourraient être le 3$^{\text{e}}$ terme dans une suite Dlin, on détermine le nombre de 1$^{\text{er}}$ termes tels que le 3$^{\text{e}}$ terme ait cette propriété.
Le plus petit 1$^{\text{er}}$ terme possible est 1 (d'où on a 10 comme 3$^{\text{e}}$ terme) et le plus grand 1$^{\text{er}}$ terme possible est 503 (d'où on a 2018 comme 3$^{\text{e}}$ terme).
De plus, chaque valeur de x entre 1 et 503 produit un 3$^{\text{e}}$ terme ayant une valeur entre 10 et 2018.
Donc, il y a 503 entiers strictement positifs, de 1 à 2020, qui pourraient être le 3$^{\text{e}}$ terme dans une suite Dlin.

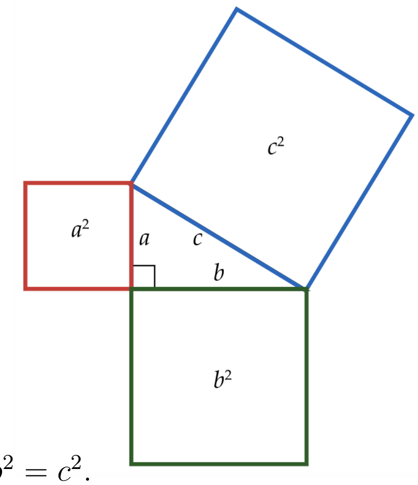
Le CEMI à la maison

9e et 10e année - le mardi 9 juin 2020
Des triplets pythagoriciens

Le théorème de Pythagore : Dans un triangle rectangle où c représente la longueur de l'hypoténuse et a et b représentent les longueurs des deux cathètes, l'équation suivante est vérifiée :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Il convient de noter que tout triangle dont les longueurs des côtés a, b et c vérifient l'équation $a^2 + b^2 = c^2$ doit être un triangle rectangle.



Un *triplet pythagoricien* est un triplet d'entiers (a, b, c) vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

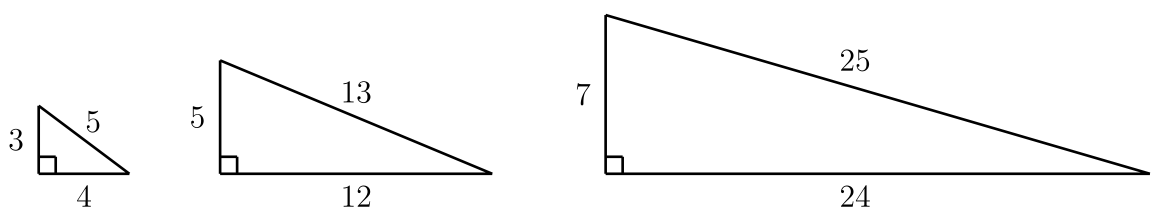
Si un triangle est formé de manière que les longueurs des côtés a, b et c soient des entiers, alors ce triangle est un triangle rectangle uniquement si (a, b, c) est un triplet pythagoricien.

Problème 1 : Le triplet $(3, 4, 5)$ est un triplet pythagoricien. Si $a = 3$, $b = 4$ et $c = 5$, alors

$$a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \quad \text{et} \quad c^2 = 5^2 = 25.$$

On a donc $a^2 + b^2 = c^2$.

Démontre que $(5, 12, 13)$ et $(7, 24, 25)$ sont également des triplets pythagoriciens.



Est-ce que chaque entier strictement positif fait partie d'au moins un triplet pythagoricien ? Il s'avère que la réponse à cette question est non. Cependant, chaque entier strictement positif supérieur ou égal à 3 *fait* partie d'un triplet pythagoricien. Explorons cette idée.

Problème 2 : Considère les triplets pythagoriciens du Problème 1 : $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ et $(7, 24, 25)$. Note que les entiers dans les coordonnées les plus à gauche des triplets sont les entiers impairs 3, 5 et 7. Remarques-tu une régularité dans les deux autres entiers de chaque triplet ? Les deux entiers restants dans chaque triplet sont des entiers consécutifs : 4 et 5, 12 et 13, 24 et 25. Explorons cette régularité.

(a) Construis un triplet pythagoricien comprenant l'entier impair 9 en suivant ces étapes :

(i) Détermine la valeur de n telle que $9^2 = 2n + 1$. (*Réponse :* $n = \frac{81-1}{2} = 40$.)

(ii) Vérifie que $(n + 1)^2 - n^2 = 9^2$. (*Réponse :* $41^2 - 40^2 = 1681 - 1600 = 81 = 9^2$.)

(iii) Écris un triplet pythagoricien dont le plus petit entier est 9. (*Réponse :* Puisque $41^2 - 40^2 = 9^2$, on a $9^2 + 40^2 = 41^2$. Donc $(9, 40, 41)$ est un triplet pythagoricien.)

(b) Construis un triplet pythagoricien comprenant l'entier impair 11 en suivant ces étapes :

(i) Détermine la valeur de n telle que $11^2 = 2n + 1$.

(ii) Vérifie que $(n + 1)^2 - n^2 = 11^2$.

(iii) Écris un triplet pythagoricien dont le plus petit entier est 11.

(c) Utilise les idées dans (a) et (b) pour construire des triplets pythagoriciens qui incluent les quatre prochains entiers impairs : 13, 15, 17, 19.

Peux-tu voir comment faire cela pour tout entier impair ? On explore cela dans le problème défi.

Problème 3 :

(a) Considère le triplet pythagoricien $(3, 4, 5)$. Démontre qu'on obtient un autre triplet pythagoricien en multipliant chacun des entiers du triplet par 2.

(b) Utilise l'idée dans (a) pour construire un autre triplet pythagoricien comprenant l'entier impair 9.

(c) Démontre que le triplet $(3n, 4n, 5n)$ est un triplet pythagoricien pour tout entier strictement positif n.

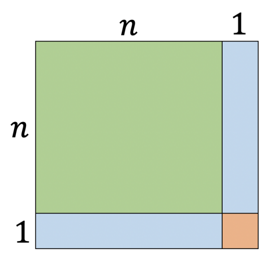
Note que $(5n, 12n, 13n)$ *et* $(7n, 24n, 25n)$ *sont également des triplets pythagoriciens.*

(d) Utilise les idées des Problèmes 2 et 3 pour démontrer que tout entier de 4 à 20 fait partie d'au moins un triplet pythagoricien.

Problème défi : Réfléchis à la façon dont tu pourrais utiliser certaines de ces idées pour démontrer que chaque entier supérieur ou égal à 3 fait partie d'un triplet pythagoricien. Une approche possible est décrite ci-dessous mais il en existe d'autres :

(a) Nombres impairs :

(i) Démontrer qu'on a $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$ pour tout entier strictement positif n.



$(n + 1)(n + 1) = ?$

(ii) Utiliser l'identité de la partie (i) pour expliquer pourquoi chaque entier impair supérieur ou égal à 3 fait partie d'un triplet pythagoricien.

(b) Nombres pairs :

(i) Démontrer qu'on a $(n + 2)^2 - n^2 = 4n + 4$ pour tout entier strictement positif n.

(ii) Utiliser l'identité de la partie (i) pour expliquer pourquoi chaque entier pair supérieur ou égal à 4 fait partie d'un triplet pythagoricien.

Plus d'infos :

Consulte la page du CEMI à la maison mardi, le 16 juin, pour les solutions à ces problèmes.

CEMC at Home

Grade 9/10 - Tuesday, June 9, 2020
Pythagorean Triples - Solution

Problem 1: The triple $(3, 4, 5)$ is a Pythagorean triple. Show that $(5, 12, 13)$ and $(7, 24, 25)$ are also Pythagorean triples.

Solution:

If $a = 5$, $b = 12$, and $c = 13$, then $a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$ and $c^2 = 13^2 = 169$. Therefore, $a^2 + b^2 = c^2$.

If $a = 7$, $b = 24$, and $c = 25$, then $a^2 + b^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$ and $c^2 = 25^2 = 625$. Therefore, $a^2 + b^2 = c^2$.

Problem 2:

(a) Build a Pythagorean triple that includes the odd integer 9 by following these steps:

  (i) Determine n such that $9^2 = 2n + 1$. (*Answer:* $n = \frac{81-1}{2} = 40$.)

  (ii) Verify that $(n + 1)^2 - n^2 = 9^2$. (*Answer:* $41^2 - 40^2 = 1681 - 1600 = 81 = 9^2$.)

  (iii) Write down a Pythagorean triple for which the smallest integer is 9. (*Answer:* Since $41^2 - 40^2 = 9^2$, we have $9^2 + 40^2 = 41^2$ and so $(9, 40, 41)$ is a Pythagorean triple.)

(b) Build a Pythagorean triple that includes the odd integer 11 by following these steps:

  (i) Determine n such that $11^2 = 2n + 1$.

  (ii) Verify that $(n + 1)^2 - n^2 = 11^2$.

  (iii) Write down a Pythagorean triple for which the smallest integer is 11.

(c) Use the ideas from (a) and (b) to build Pythagorean triples that include the next four odd integers: 13, 15, 17, 19.

Solution:

(b) (i) We have $11^2 = 121 = 2n + 1$ exactly when $n = \frac{121-1}{2} = 60$.

  (ii) When $n = 60$ we have $(n + 1)^2 - n^2 = 61^2 - 60^2 = 3721 - 3600 = 121 = 11^2$.

  (iii) Since $61^2 - 60^2 = 11^2$, we have $11^2 + 60^2 = 61^2$ and so $(11, 60, 61)$ is a Pythagorean triple involving the integer 11.

(c) For the integer 13: We have $13^2 = 169 = 2n + 1$ exactly when $n = \frac{169-1}{2} = 84$. We can verify that $85^2 - 84^2 = 13^2$ which means $13^2 + 84^2 = 85^2$ and so $(13, 84, 85)$ is a Pythagorean triple involving the integer 13.

Using this same method, we can also obtain the following Pythagorean triples:

$$(15, 112, 113), (17, 144, 145), (19, 180, 181)$$

Problem 3:

(a) Consider the Pythagorean triple $(3, 4, 5)$. Show that if you multiply each integer in the triple by 2, then you obtain another Pythagorean triple.

Solution:

If we multiply each integer in the triple $(3, 4, 5)$ by 2, then we obtain the triple $(6, 8, 10)$. We can check that this triple is a Pythagorean triple as follows: $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$.

(b) Use the idea from (a) to build another Pythagorean triple that includes the odd integer 9.

Solution:

If we multiply each integer in the triple $(3, 4, 5)$ by 3, then we obtain the triple $(9, 12, 15)$. We can check that this triple is a Pythagorean triple as follows: $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$.

Note that we have now found two different Pythagorean triples that involve the odd number 9: $(9, 40, 41)$ *and* $(9, 12, 15)$.

(c) Show that for every positive integer n, the triple $(3n, 4n, 5n)$ is a Pythagorean triple.

It is also true that $(5n, 12n, 13n)$ *and* $(7n, 24n, 25n)$ *are Pythagorean triples.*

Solution:

First we note that for every positive n, the numbers $3n$, $4n$, and $5n$ are positive integers. Also, we have $(3n)^2 + (4n)^2 = 9n^2 + 16n^2 = 25n^2 = (5n)^2$. This means that the triple $(3n, 4n, 5n)$ is a Pythagorean triple.

Note: In a similar way, we can show that $(5n)^2 + (12n)^2 = 25n^2 + 144n^2 = 169n^2 = (13n)^2$ *and* $(7n)^2 + (24n)^2 = 49n^2 + 576n^2 = 625n^2 = (25n)^2$.

(d) Use the ideas from Problem 2 and Problem 3 to show that every integer from 4 to 20 is part of at least one Pythagorean triple.

Solution:

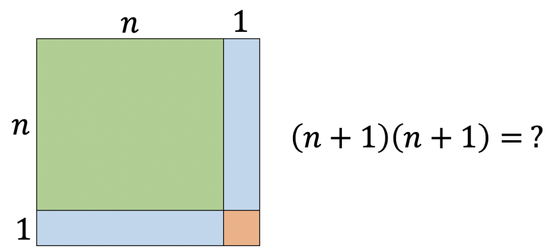
We provide at least one triple for each integer. Some of the triples given below have already been justified earlier. See if you can determine how the other triples were built using the ideas from Problem 2 and Problem 3. For example, the second triple given for 10 was obtained by multiplying each integer in the Pythagorean triple $(5, 12, 13)$ by 2 and using the idea from Problem 3(c).

4: $(3, 4, 5)$
5: $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$
6: $(6, 8, 10)$
7: $(7, 24, 25)$
8: $(6, 8, 10)$
9: $(9, 40, 41)$, $(9, 12, 15)$
10: $(6, 8, 10)$, $(10, 24, 26)$
11: $(11, 60, 61)$
12: $(5, 12, 13)$, $(9, 12, 15)$, $(12, 16, 20)$
13: $(13, 84, 85)$
14: $(14, 48, 50)$
15: $(9, 12, 15)$, $(15, 112, 113)$
16: $(12, 16, 20)$
17: $(17, 144, 145)$
18: $(18, 24, 30)$, $(18, 80, 82)$
19: $(19, 180, 181)$
20: $(12, 16, 20)$, $(20, 48, 52)$

Challenge Problem: Think about how you might use some of these ideas to show that every integer that is at least 3 is part of a Pythagorean triple. One possible approach is outlined below, but there are others:

(a) Odd numbers:

(i) Show that for every positive integer n, we have $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$.



(ii) Use the identity from part (i) to explain why every odd integer that is at least 3 is part of a Pythagorean triple.

Solution:

(i) *Method 1:* Using the image provided, we see that the area of the largest square is represented by the quantity $(n+1)(n+1)$, the area of the medium square is represented by the quantity $(n)(n)$, the area of each of the two rectangles is represented by the quantity $(1)(n)$, and the area of the smallest square is represented by the quantity $(1)(1)$. Since the medium square, small square and two rectangular regions are used to form the larger square we must have

$$(n+1)(n+1) = (n)(n) + (1)(n) + (1)(n) + (1)(1)$$

This simplifies to $(n+1)^2 = n^2+2n+1$ which can be rearranged to give $(n+1)^2-n^2 = 2n+1$.

Method 2: Using the distributive property, we have $(n+1)(n+1) = (n+1)(n) + (n+1)(1)$ which means

$$(n+1)^2 = (n+1)(n+1) = (n+1)(n) + (n+1)(1) = n^2 + n + n + 1 = n^2 + 2n + 1$$

It follows that $(n+1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$.

Method 3: If you have seen the formula for the difference of squares before, then you may see that

$$(n+1)^2 - n^2 = ((n+1)+n)((n+1)-n) = (2n+1)(1) = 2n+1$$

(ii) We follow the method from Problem 2 for a general odd integer k that is *greater than* 1: Let $n = \frac{k^2-1}{2}$. Since k^2 must also be an odd integer that is greater than 1, $k^2 - 1$ must be an even integer that is greater than 0. This means n is a positive integer. Rearranging the equation gives $k^2 = 2n+1$. Using the formula from (i), we get that

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 = k^2$$

for this value of n. Rearranging the equation above gives

$$k^2 + n^2 = (n+1)^2$$

which shows that $(k, n, n+1)$ is a Pythagorean triple that includes the given odd integer k.

(b) Even numbers:

(i) Show that for every positive integer n, we have $(n+2)^2 - n^2 = 4n + 4$.

(ii) Use the identity from part (i) to explain why every even integer that is at least 4 is part of a Pythagorean triple.

Solution:

(i) Since $(n+2)^2 = (n+2)(n+2) = (n+2)(n) + (n+2)(2) = n^2 + 2n + 2n + 4 = n^2 + 4n + 4$ we have $(n+2)^2 - n^2 = (n^2 + 4n + 4) - n^2 = 4n + 4$.

(ii) To show this you can follow the method from part (a) of the challenge problem. We do not give a full solution here, but instead outline the steps using an example.

We can build a Pythagorean triple that includes the even integer 6 by following these steps:

- Determine n such that $6^2 = 4n + 4$:
  Solving we get $n = \frac{36-4}{4} = 8$.
- From part (i) above, we know that for this n we will have $(n+2)^2 - n^2 = 6^2$.
  We can verify this directly: $(8+2)^2 - 8^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 = 6^2$.
- This works shows that $(6, 8, 10)$ is a Pythagorean triple.

Suppose that k is an even integer that is *greater than* 2. If you can find find a positive integer n such that $k^2 = 4n + 4$, then the steps above show that $(k, n, n+2)$ is a Pythagorean triple. Can you see why there will always be such a value of n?

If $k > 2$ and is even then $k^2 > 4$ and is a multiple of 4, and so $k^2 - 4 > 0$ and is a multiple of 4. It follows that $n = \frac{k^2-4}{4}$ is a positive integer and satisfies $k^2 = 4k + 4$ as needed!

Parts (a) and (b) of the challenge problem show that every integer that is at least 3 is part of a Pythagorean triple. Can you explain why the integers 1 and 2 cannot be part of Pythagorean triples?

Le CEMI à la maison

9e et 10e année - le mercredi 10 juin 2020
Des bases interplanétaires

Tu fais partie d'une mission interplanétaire dont le but est de cataloguer le nombre d'éléments présents sur deux des lunes de Jupiter. Six astronautes différents ont rapporté le nombre d'éléments qu'ils ont découverts mais, pour te jouer un tour, ils ont rapporté leurs découvertes en utilisant des *systèmes de numération* différents de ceux auxquels tu es habitué. Pire encore, ils refusent de dévoiler les détails des systèmes de numération qu'ils ont utilisés.

Astronaute	**Nombre total d'éléments découverts**	**Base utilisée**	**Nombre d'éléments découverts sur la Lune 1**	**Nombre d'éléments découverts sur la Lune 2**
Afon	131			
Breanna	105			
Cheng	221			
Denisa	56			
Eka	105			
Fergus	221			

Chacun des astronautes a rapporté son nombre en utilisant un système de numération en *base b*.

On utilise normalement un système de numération en *base 10*. Dans un tel système, tu peux utiliser les chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ou 9 comme les chiffres de tes nombres. Dans un système de numération en base 10, le nombre 763 représente l'entier ayant la valeur suivante :

$$7 \times 100 + 6 \times 10 + 3 \times 1 = 7 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

Chacun des astronautes a rapporté son nombre en utilisant un système de numération en base b, b étant un entier strictement positif qui vérifie $4 \leq b \leq 7$. Dans un système de numération en base b, les astronautes peuvent utiliser les chiffres $0, 1, \ldots, (b-1)$ comme les chiffres de leurs nombres. Dans un tel système, le nombre ABC (A, B et C étant des chiffres) représente l'entier ayant la valeur suivante :

$$A \times b^2 + B \times b + C \times 1 = A \times b^2 + B \times b^1 + C \times b^0$$

Par exemple, dans un système de numération en base $b = 4$, le nombre 203 représente l'entier ayant la valeur suivante :

$$2 \times 4^2 + 0 \times 4 + 3 \times 1.$$

Or, des nombres tels que 124 et 552 n'ont aucun sens dans ce système car ils contiennent des chiffres supérieurs à 3.

Problème 1 : Les astronautes t'ont donné deux indices quant à leurs rapports :

- Exactement deux des astronautes ont rapporté leurs nombres en utilisant un système de numération en base $b = 4$.
- Chacun des six astronautes a découvert le même nombre d'éléments au total.

Détermine combien d'éléments ont été découverts au total sur les deux lunes (utilise le système de numération habituel en base 10 pour donner ta réponse) et détermine quelle base chacun des astronautes utilisait pour rendre compte de ses découvertes.

Problème 2 : On te dit maintenant que chaque astronaute a découvert 16 éléments différents sur la Lune 1 et que les deux lunes avaient 3 éléments en commun (ces nombres sont en base 10). Utilise cette information pour remplir les cellules vides dans le tableau ci-dessus. *Assure-toi d'écrire les nombres en utilisant la bonne base !*

Plus d'infos :

Consulte la page du CEMI à la maison mercredi, le 17 juin, pour les solutions à ces problèmes.

CEMC at Home

Grade 9/10 - Wednesday, June 10, 2020
Interplanetary Bases - Solution

Set-up: Six different astronauts have reported the number of elements they discovered on two moons, but reported their findings using different *number systems* than you are used to.

Astronaut	Total Number of Elements Discovered	Base used	Number of Elements Discovered on Moon 1	Number of Elements Discovered on Moon 2
Afon	131			
Breanna	105			
Cheng	221			
Denisa	56			
Eka	105			
Fergus	221			

Each astronaut used a number system with a positive integer b as the base, with $4 \leq b \leq 7$. In the base b system, they can use any of the digits $0, 1, \ldots, (b-1)$ to form the digits in their numbers. In this base, the numeral ABC (where A, B, and C are digits) represents the integer with value

$$A \times b^2 + B \times b + C \times 1 = A \times b^2 + B \times b^1 + C \times b^0$$

Problem 1: The astronauts gave you two clues about the overall report:

- Exactly two of the astronauts reported their numbers in base $b = 4$.
- All six astronauts discovered (and reported discovering) the same number of elements in total.

Determine how many elements were discovered on the two moons, in total, and determine which base each of the astronauts was using to report their findings.

Solution:

If two astronauts reported their findings using the same number system, then they will have reported identical numerals. The only numerals that appear more than once in the table above are 105 and 221. This means one of these two numerals must represent the total number of elements discovered written in base $b = 4$. Since a base 4 representation of a number can only use the digits 0, 1, 2, and 3, the numeral 105 cannot be a base 4 representation of any number. This means the total number of elements discovered is represented in base 4 as 221. In base 4, the numeral 221 represents the integer $2 \times 4^2 + 2 \times 4 + 1 = 32 + 8 + 1 = 41$.

We now know that Cheng and Fergus reported their findings in base 4, and that there were 41 elements discovered in total. There are several ways to approach the problem from here.

Consider the numeral 131. We know this is not in base 4 because the total in base 4 is represented by 221. The largest digit in 131 is 3, so this numeral makes sense in all three other bases: 5, 6, and 7. In base 5, it represents the integer $1 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 1 = 25 + 15 + 1 = 41$. Notice that in base 6, the numeral 131 would represent the integer $1 \times 6^2 + 3 \times 6 + 1 = 36 + 18 + 1 = 55$ and in base 7 it would represent $7^2 + 3 \times 7 + 1 = 71$. We conclude that the numeral 131 is in base 5 and that Afon used base 5.

This means the numeral 105 represents the total in either base 6 or base 7. In base 6, it represents the integer $1 \times 6^2 + 0 \times 6 + 5 = 36 + 5 = 41$. In base 7, it represents the integer $1 \times 7^2 + 0 \times 7 + 5 = 54$. We conclude that the numeral 105 is in base 6 and so Breanna and Eka used base 6.

Finally, we suspect that 56 is in base 7, and indeed, $5 \times 7 + 6 = 41$, so we conclude that Denisa reported in base 7.

We can also solve this problem using algebra once we have determined that the total number of elements is 41. For example, we know that the numeral 56 is the base b representation of 41 for some b between 4 and 7 inclusive. This means $41 = 5b + 6$, or $35 = 5b$, which can be solved for b to get $b = 7$. Similarly, to determine in which base the numeral 131 represents the number 41, we can solve the equation $41 = 1 \times b^2 + 3 \times b + 1$ for b. Rearranging, we get $40 = b^2 + 3b$. If you have experience factoring quadratics, you can solve this equation for b. If not, since you only have four possibilities for b, you can check $b = 4, 5, 6, 7$ and find that $b = 5$ is the only solution among these four choices. Finally, the numeral reported by Breanna leads to the equation $41 = b^2 + 5$ or $36 = b^2$. Since b is positive, this means $b = 6$.

Problem 2: You are now told that each astronaut discovered 16 distinct elements on Moon 1 and discovered 3 elements common to both moons, with these numbers given in base 10. Using this information, fill in the blank cells in the table above.

Solution:

The number of elements that were discovered on only Moon 1 is $16 - 3 = 13$, which means there must have been 28 elements discovered on Moon 2. Filling in the table means finding the base 4, 5, 6, and 7 representations of 16 and 28. These representations are given in the table below. To help explain how these numerals were obtained, we show the work for the first row below the table.

Astronaut	**Total Number of Elements Discovered**	**Base used**	**Number of Elements Discovered on Moon 1**	**Number of Elements Discovered on Moon 2**
Afon	131	5	31	103
Breanna	105	6	24	44
Cheng	221	4	34	130
Denisa	56	7	22	40
Eka	105	6	24	44
Fergus	221	4	34	130

To represent the integer 16 in base 5, we first note that its base 5 representation must have at most two digits. This is because the numeral ABC represents the integer with value $A \times 5^2 + B \times 5 + C$ which is at least 25 (assuming A is a positive digit). Thus, we seek digits A and B between 0 and 4 inclusive so that $A \times 5 + B = 16$. It is easy to check that digits $A = 3$ and $B = 1$ satisfy this equation, and in fact, it is true that no other pair of integers between 0 and 4 inclusive satisfies the equation. Therefore, the numeral 31 is the base 5 representation of the integer 16.

To represent the integer 28 in base 5, notice that 5^3 and hence all larger powers of 5 are greater than 28, so the base 5 representation of 28 has at most three digits. As well, the two-digit numeral with the largest value in base 5 is 44 which represents the integer $4 \times 5 + 4 = 24$, so this means the base 5 representation of 28 has exactly three digits. Therefore, we seek integers A, B, and C all between 0 and 4 inclusive satisfying $A \times 5^2 + B \times 5^1 + C \times 5^0 = 28$ or $25A + 5B + C = 28$. We know that $A \geq 1$ since the representation has three digits, but if $A \geq 2$, then $25A \geq 50 > 28$, so this means we must have $A = 1$. The equation then simplifies to $5B + C = 3$, and the only solution to this equation where B and C are integers between 0 and 4 inclusive is $B = 0$ and $C = 3$. Therefore, the base 5 representation of the integer 28 is 103.

There are systematic ways of expressing numbers in various bases. You may wish to do an internet search to learn more about this.

Le CEMI à la maison

9e et 10e année - le jeudi 11 juin 2020
PRODUITivité

Le *produit des chiffres* d'un nombre entier positif est le produit de tous les chiffres qui composent ce nombre.

Par exemple, le produit des chiffres du nombre 234 est $2 \times 3 \times 4 = 24$. Il existe d'autres nombres dont le produit des chiffres est aussi 24. Par exemple, 2233, 113181 et 38, ont tous un produit des chiffres égal à 24. Le nombre 38 est le plus petit nombre entier positif dont le produit des chiffres est 24.

Il existe plusieurs nombres entiers positifs dont le produit des chiffres est 2000.

Détermine le plus petit nombre entier positif dont le produit des chiffres de 2000.

Plus d'infos :

Consulte la page du CEMI à la maison vendredi, le 12 juin, pour la solution à PRODUITivité.

Cette ressource du CEMI à la maison est un problème passé du Problème de la semaine. Le Problème de la semaine est une ressource hebdomadaire gratuite que le CEMI met à la disposition des enseignant(e)s, des parents et des élèves pendant l'année scolaire. Les publications du Problème de la semaine sont terminées pour cette année scolaire en cours et reprendront le 17 septembre 2020. Pour t'abonner et consulter les problèmes passés et leurs solutions, visite :
https://www.cemc.uwaterloo.ca/resources/potw-f.php

CEMC at Home

Grade 9/10 - Thursday, June 11, 2020
PRODUCTivity - Solution

Problem:

The *"digit product"* of a positive integer is the product of the individual digits of the integer.

For example, the digit product of 234 is $2 \times 3 \times 4 = 24$. Other numbers also have a digit product of 24. For example, 2223, 113 181 and 38 each have a digit product of 24. The number 38 is the smallest positive integer with a digit product of 24.

There are many positive integers whose digit product is 2000.

Determine the smallest positive integer whose digit product is 2000.

Solution:

Let N be the smallest positive integer whose digit product is 2000.

In order to find N, we must find the minimum possible number of digits whose product is 2000. This is because if the integer a has more digits than the integer b, then $a > b$.
Once we have determined the digits that form N, then the integer N is formed by writing those digits in increasing order.

Note that the digits of N cannot include 0, or else the digit product of N would be 0.
Also, the digits of N cannot include 1, otherwise we could remove the 1 and obtain an integer with fewer digits (and thus, a smaller integer) with the same digit product. Therefore, the digits of N will be between 2 and 9, inclusive.

Since the digit product of N is 2000, we will use the prime factorization of 2000 to help determine the digits of N:

$$2000 = 2^4 \times 5^3$$

In order for a digit to have a factor of 5, the digit must equal 5. Therefore, three of the digits of N are 5.

The remaining digits of N must have a product of $2^4 = 16$. We need to find a combination of the smallest number of digits whose product is 16. We cannot have one digit whose product is 16, but we can have two digits whose product is 16. In particular, $16 = 2 \times 8$ and $16 = 4 \times 4$.

Therefore, N has 5 digits. They are 5, 5, 5, 2, 8 or 5, 5, 5, 4, 4. In order for N to be as small as possible, its digits must be in increasing order. The smallest positive integer formed by the digits 5, 5, 5, 2, 8 is 25 558. The smallest positive integer formed by the digits 5, 5, 5, 4, 4 is 44 555.

Since $25\ 558 < 44\ 555$, the smallest N is 25 558. That is, the smallest positive integer with a digit product of 2000 is 25 558.

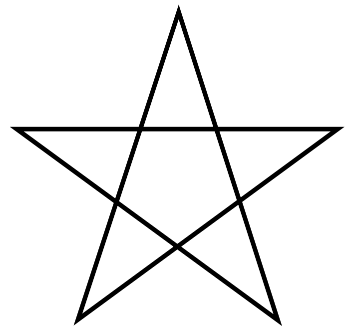
Le CEMI à la maison

9e et 10e année - le vendredi 12 juin 2020
Des morceaux d'une étoile

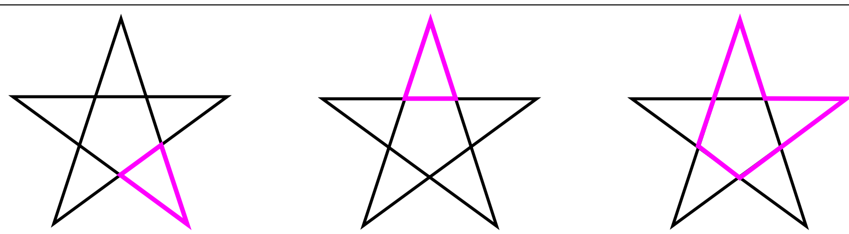
Un *polygone* est une figure fermée à deux dimensions formée de segments de droites. Un *polygone simple* est un polygone dont les segments de droites qui le forment ne se coupent pas. Pensons à la manière dont on pourrait tracer les bords d'un polygone simple : on se déplace uniquement en lignes droites et la seule fois où on reviendrait à un point pour la deuxième fois serait lorsqu'on aurait terminé de tracer tous les bords du polygone.

Problème :

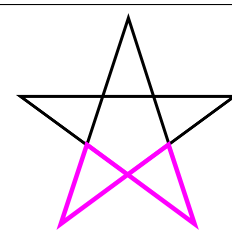
On trouve 37 polygones simples dans l'étoile à 5 branches ci-contre. Décris les 37 polygones et explique pourquoi il n'y en a pas plus.



Les côtés de tes polygones doivent tous être des segments de droites de l'étoile. Pour t'aider à commencer, voici trois exemples de polygones simples que l'on peut trouver dans l'étoile, ainsi qu'un polygone qui n'est pas un polygone simple.



Trois polygones simples
(permis)



Un polygone qui n'est pas simple
(interdit)

Conseils pour compter les polygones :

1. Quels sont les polygones simples que tu peux trouver qui ne sont pas isométriques aux polygones présentés dans les exemples ci-dessus ?
2. Combien de polygones simples n'incluent pas l'intérieur du pentagone ?
3. Le nombre de polygones simples qui incluent l'intérieur du pentagone est une puissance de 2.

Discussion de suivi :

As-tu pu trouver un moyen systématique de compter les polygones simples dans l'étoile à 5 branches ? Cette même stratégie pourrait-elle être utilisée pour compter les polygones simples dans une étoile à 6 branches ou dans une étoile à 7 branches ?

En général, une étoile à n branches est composée d'un n-gone au centre et de n triangles attachés à ses côtés et pointant vers l'extérieur. Pensez à la question suivante :

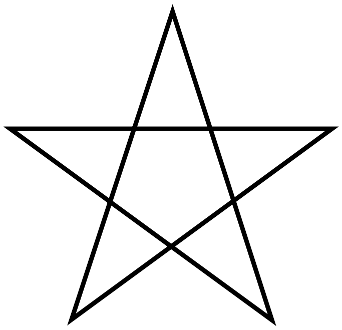
Question complémentaire : Combien de polygones simples existe-t-il dans une étoile à n branches ?

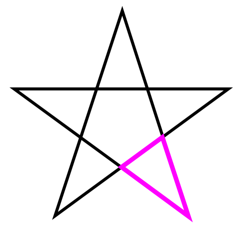
Plus d'infos : Consulte la page du CEMI à la maison vendredi, le 19 juin, pour la solution à ce problème.

CEMC at Home

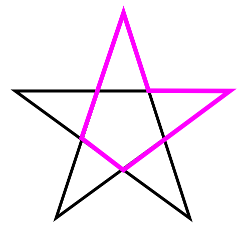
Grade 9/10 - Friday, June 12, 2020
Pieces of a Star - Solution

Problem: There are 37 simple polygons to be found in the 5-pointed star shown. Describe the 37 simple polygons and explain why there are no more.





Example 1



Example 2

Solution: First, we note that there are 5 simple polygons in the star that do not include the pentagon in the centre: the 5 triangles that form the 5 points of the star. One such triangle is shown in Example 1 above.

Every other simple polygon in the star will consist of the pentagon in the centre plus some of the 5 triangles which form the points of the star. One of these polygons is formed by choosing *none* of the triangles. In this case we get the pentagon in the centre. Another of these polygons is formed by choosing *all* of the triangles. In this case we get the entire 5-pointed star (or its boundary). Another of these polygons is formed by choosing the two triangles at the top right. In this case we get the pentagon shown in Example 2.

We could try to systematically draw all of these polygons, but we can count them without doing so. Each such polygon either includes a particular triangle or it does not. This means when drawing one of these polygons, we have two choices for each triangle: in or out. This leads to $2^5 = 32$ different possibilities for which triangles we include, and hence there must be 32 simple polygons that include the pentagon in the centre.

Putting this all together, there are 5 simple polygons that do not include the pentagon (the 5 outer triangles) and 32 simple polygons that include the pentagon. Therefore, there are $5 + 32 = 37$ simple polygons in the star, in total.

Follow-up Question: How many simple polygons are there in an n-pointed star?

Solution: We can think of an n-pointed star as an n-gon with n triangles around it. The n triangles form the n points of the star.

Some of the simple polygons in the star are the n triangles that form the n points of the star. Every other simple polygon will consist of the n-gon in the centre plus some of the n triangles that form the points of the star. Since there are n triangles, and for each triangle we have 2 choices (include or not include), there are 2^n such polygons.

Therefore, in total, we have $n + 2^n$ simple polygons in the n-pointed star.

In particular, when $n = 6$ we have $6 + 2^6 = 70$ and so there are 70 simple polygons in the 6-pointed star, and when $n = 7$ we have $7 + 2^7 = 135$ and so there are 135 simple polygons in the 7-pointed star.