Le CEMI à la maison

9e et 10e année - le lundi 11 mai 2020
Concours - jour 2

La ressource d'aujourd'hui présente deux questions des concours de mathématiques 2020 du CEMI.

Concours de mathématiques canadien par équipe 2020, problème d'équipe nº9

Combien de fois le chiffre 0 apparaît-il dans l'entier égal à 20^{10} ?

Concours de mathématiques canadien par équipe 2020, problème individuel nº7

Vingt-sept cubes unités sont chacun colorés soit complètement en noir ou complètement en rouge. Les cubes unités sont assemblés en un cube plus grand. Si $\frac{1}{3}$ de l'aire de la surface du grand cube est rouge, quel est le plus petit nombre de cubes unités qui auraient pu être colorés en rouge ?

Plus d'infos :

Consulte la page internet du CEMI à la maison jeudi, le 21 mai, pour les solutions aux problèmes de Concours Jour 2.

Le CEMI à la maison

9e et 10e année - le lundi 11 mai 2020
Concours, jour 2 - solutions

Voici les solutions aux deux problèmes de concours. La solution du second problème est accompagnée d'une vidéo.

Concours de mathématiques canadien par équipe 2020, problème d'équipe nº 9

Combien de fois le chiffre 0 apparaît-il dans l'entier égal à 20^{10} ?

Solution :

En factorisant et en appliquant les lois des exposants, on a $20^{10} = (2 \times 10)^{10} = 2^{10} \times 10^{10}$.
Donc, $20^{10} = 1024 \times 10^{10}$, soit l'entier 1024 suivi de dix zéros.
Donc, le chiffre 0 parait onze fois dans 20^{10} ; 10 zéros proviennent de la fin de l'entier et 1 zéro provient du 1024 au début.

Concours de mathématiques canadien par équipe 2020, problème individuel nº 7

Vingt-sept cubes unités sont chacun colorés soit complètement en noir ou complètement en rouge. Les cubes unités sont assemblés en un cube plus grand. Si $\frac{1}{3}$ de l'aire de la surface du grand cube est rouge, quel est le plus petit nombre de cubes unités qui auraient pu être colorés en rouge ?

Solution :

Puisque $\sqrt[3]{27} = 3$, le grand cube doit avoir pour dimensions $3 \times 3 \times 3$.
Donc, chacune des faces du grand cube a une aire de $3 \times 3 = 9$.
Un cube a 6 faces, donc l'aire totale du cube est composée de $9 \times 6 = 54$ carrés 1×1 (ces derniers étant les faces des cubes unités).
Puisque $\frac{1}{3}$ de l'aire totale du grand cube est rouge, alors $\frac{54}{3} = 18$ de ces carrés unités sont de couleur rouge.

Aucune des faces du cube unité au centre du grand cube n'est visible. Les 6 cubes unités au centre des faces du grand cube n'ont chacun qu'une seule face visible. Les 12 cubes unités situés le long des arêtes (et n'étant pas situés aux extrémités mêmes de ces dernières) ont chacun deux faces visibles. Les 8 cubes unités situés aux 8 coins du grand cube ont chacun trois faces visibles.
Chacun des 27 cubes unités a soit 0, 1, 2 ou 3 de ses faces visibles sur les faces du grand cube.
Cela signifie qu'au plus trois faces d'un cube unité se trouvent sur les faces du grand cube. Donc, afin d'avoir 18 carrés unités rouges sur les faces du grand cube, il doit y avoir au moins 6 cubes unités rouges.

Il y a 8 cubes unités situés aux 8 coins du grand cube. Donc, si on colorie exactement 6 cubes unités en rouge et les 21 cubes unités restants en noir et qu'on arrange ces cubes en un cube plus grand de dimensions $3 \times 3 \times 3$ de manière que les 6 cubes unités rouges soient situés aux coins du grand cube, alors il y aura exactement 18 carrés unités rouges sur les faces du grand cube.
Donc, la réponse est 6.

Vidéo

Clique sur le lien suivant pour une explication de la solution à ce deuxième problème :
https://youtu.be/K9ax9uQESME

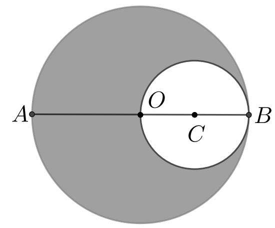
Le CEMI à la maison

9e et 10e année - le mardi 12 mai 2020
Des cercles ombrés

Pour chaque problème, utilise les informations et la figure données pour **déterminer l'aire de la région ombrée**. Exprime tes réponses sous forme de nombres exacts réduits tels que $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$.

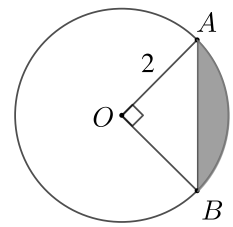
Problème 1

Dans la figure ci-contre, on voit deux cercles de centres C et O. Le cercle de centre O a pour diamètre AB. Le cercle de centre C a pour diamètre OB. Le cercle de centre O a un diamètre de 20.



Problème 2

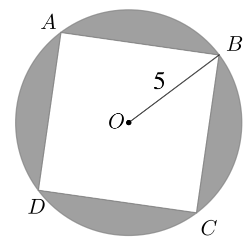
Dans la figure ci-contre, le cercle de centre O a un rayon de 2. Les points A et B sont situés sur le cercle tels que $\angle AOB = 90°$.



Problème 3

Dans la figure ci-contre, le carré $ABCD$ est inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 5.

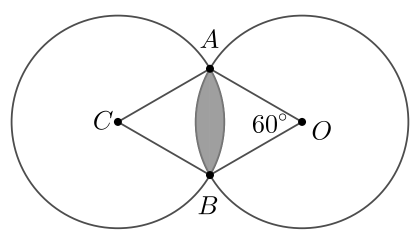
Un carré est inscrit dans un cercle si les quatre sommets du carré sont situés sur le cercle.



Problème 4

Dans la figure ci-contre, deux cercles de centres C et O ont chacun un rayon de 10. Les cercles se coupent en A et B tels que $\angle AOB = 60°$.

Peux-tu visualiser à quoi ressemblerait cette figure si on séparait les cercles ?



Plus d'infos :

Consulte la page du CEMI à la maison mardi, le 19 mai, pour les solutions à ces problèmes.

Pour réviser comment calculer l'aire d'un triangle et l'aire d'un cercle, visionne les vidéos suivantes dans le didactitiel du CEMI : l'aire d'un triangle et l'aire d'un cercle.

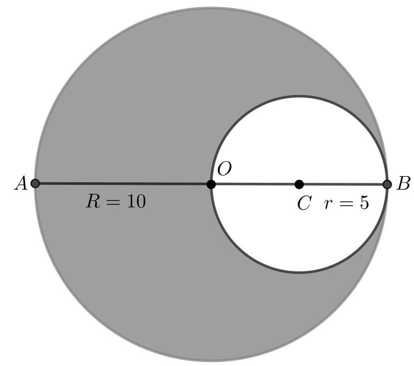
CEMC at Home

Grade 9/10 - Tuesday, May 12, 2020
Shady Circles - Solution

Problem 1 Solution

We will find the area of the shaded region by subtracting the area of the smaller circle from the area of the larger circle.
Let R be the radius of the larger circle and r be the radius of the smaller circle.

Since the diameter of the smaller circle is the radius of the larger circle, we have $R = \frac{20}{2} = 10$ and $r = \frac{10}{2} = 5$.



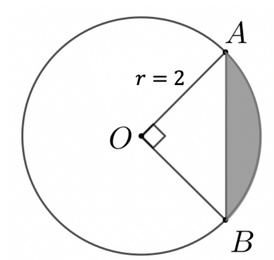
$A_{\text{larger}} = \pi R^2 = \pi(10)^2 = 100\pi$
$A_{\text{smaller}} = \pi r^2 = \pi(5)^2 = 25\pi$

Therefore, the area of the shaded region is $100\pi - 25\pi = 75\pi$.

Problem 2 Solution

To find the area of the shaded region, we will find the area of the sector of the circle with arc AB and subtract the area of $\triangle AOB$. Note that the triangle is a right isosceles triangle and therefore, the base and height are both equal to the radius which is 2.

$A_{wholeCircle} = \pi r^2 = \pi(2)^2 = 4\pi$
$A_{sector} = \left(\dfrac{90}{360}\right) 4\pi = \pi$
$A_{triangle} = \dfrac{bh}{2} = \dfrac{(2)(2)}{2} = 2$



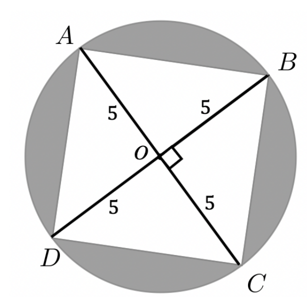
Therefore, the area of the shaded region is $\pi - 2$.

Problem 3 Solution

There are a few different ways to approach this problem. We will outline two approaches. Each of these approaches relies upon the following facts that we will not prove:

1) The two diagonals of the inscribed square intersect at the centre, O, of the circle.

2) The two diagonals of the inscribed square bisect each other and meet at right angles.



Approach 1: Recognize that the shaded region in this problem consists of four identical shaded regions, each having an area that can be calculated by subtracting the area of a triangle from the area of a sector of a the circle (as in Problem 2).

The final calculation is as follows: Area $= 4\left(\frac{\pi(5)^2}{4} - \frac{5^2}{2}\right) = 25\pi - 50$.

Approach 2: Recognize that the area of the shaded region is the area of the circle minus the area of the inscribed square.

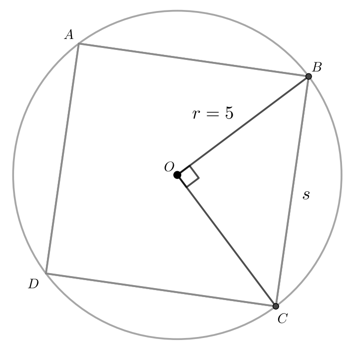
The area of the circle $\pi r^2 = \pi(5)^2 = 25\pi$.

Let s be the side length of the square as shown in the figures below.

Note that $\triangle BOC$ is a right isosceles triangle. Therefore, its base and height are both equal to the radius which is $r = 5$. We can calculate the value of s^2 as follows:

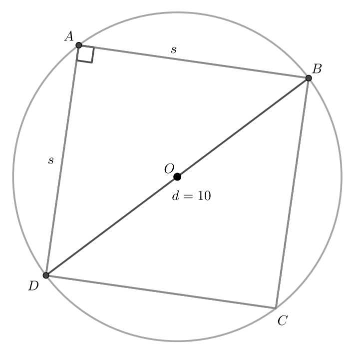
Using the Pythagorean Theorem on $\triangle BOC$, we get

$$\begin{aligned} s^2 &= r^2 + r^2 \\ s^2 &= (5)^2 + (5)^2 \\ s^2 &= 25 + 25 \\ s^2 &= 50 \end{aligned}$$



Alternatively, using the Pythagorean Theorem on $\triangle BAD$, with diameter $d = 10$, we get

$$\begin{aligned} d^2 &= s^2 + s^2 \\ 10^2 &= 2s^2 \\ 100 &= 2s^2 \\ 50 &= s^2 \end{aligned}$$

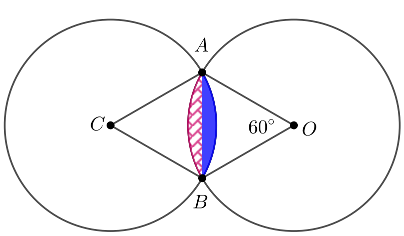


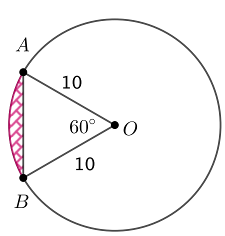
Each of these calculations tells us that the area of the square is $s^2 = 50$.

Therefore, the area of the shaded region is $25\pi - 50$.

Problem 4 Discussion

One way to find the area of the shaded region is to observe that it is made up of two identical regions as shown below. You can find the area of each of the regions using a similar method to that in the solution to Problem 2, although the area of the triangle will not be as easy to calculate in this case. We leave the details to you, but give the key values in the calculations here.





Area of triangle AOB is $\frac{1}{2}(10)(\sqrt{75})$

Area of sector AOB is $\frac{60}{360}(\pi(10)^2)$