Partie 2 – À l'intention de l'enseignante ou de l'enseignant

Domaines

Problème 1 – Numération et sens du nombre
Problème 2 – Traitement des données et probabilité
Problème 3 – Mesure; Géométrie et sens de l'espace
Problème 4 – Numération et sens du nombre; Modélisation et algèbre
Problème 5 – Mesure
Problème 6 – Géométrie et sens de l'espace

Indices et suggestions

Problème 1 a)
1er indice – Quels sont les jours de la semaine où l'on peut naître? Combien de ces jours sont des mardis? Comment utilise-t-on ces nombres pour établir la probabilité de naître un mardi?

Problème 1 b) – f)
1er indice – Combien y a-t-il de jours dans une année bissextile? Dans une année non bissextile? Combien souvent une année bissextile survient-elle?

Problème 2
1er indice – Quels indices permettent de découvrir un nombre précis de cannettes ou de lettres?
2e indice – Quelles sont les deux possibilités pour Jamil?
3e indice – Y a-t-il plus d'une possibilité pour Maryse?
4e indice – Combien de lettres Julie a-t-elle pu recycler?

Suggestion : Le tableau suivant peut être utile. Il permet aux élèves à organiser leurs idées. À mesure que les élèves lisent les indices, elles et ils peuvent placer des noms dans les cases appropriées et noircir les cases qui révèlent un cas impossible.

Cannettes

Lettres		16	17	22	25	29
	101					
	102					
	105					
	136					
	138					

Problème 3
1er indice – Si deux figures ont la même aire, doivent-elles avoir la même forme?

Suggestion : On peut fournir du papier isométrique aux élèves. Il leur permet de procéder par tâtonnements. (Voir les solutions.)

Problème 4b)
1er indice – Combien de possibilités y a-t-il pour le chiffre des centaines? Pour le chiffre des unités?
2e indice – Combien de possibilités y a-t-il pour le chiffre des dizaines?
3e indice – Écris tous les palindromes de 3 chiffres dont le chiffre des centaines est égal à 1. Combien y en a-t-il?

Prolongement : 1er indice – Pourquoi 10 n'est-il pas un diviseur?
2e indice – Pourquoi le diviseur n'est-il pas pair?

Problème 5a)
1er indice – Quel est le périmètre du stationnement B? Quelle est son aire?
2e indice – Si tu connais le périmètre p d'un carré, comment peux-tu trouver la longueur d'un côté?

Problème 5b)
1er indice – Quelle doit être l'aire de chaque stationnement?
2e indice – Quelles sont les dimensions possibles qui donnent cette aire?

Prolongement : 1er indice – Quel doit être le périmètre de chaque stationnement?
2e indice – Quelles sont les dimensions du stationnement le plus long et le plus étroit?
3e indice – À mesure qu'une dimension change, qu'est-ce qui arrive à l'autre dimension?

Problème 6
Suggestion 1 : On peut avertir les élèves, au départ, qu'il ne semble pas y avoir une réponse définitive. Il y aura toujours un gaspillage.
Suggestion 2 : On peut fournir du papier quadrillé au centimètre sur lequel les élèves peuvent copier et découper plusieurs exemplaires de chaque développement. Les élèves peuvent aussi créer et découper plusieurs copies d'une grille 12 sur 12, ce qui leur permettra de conserver leurs essais. Les élèves peuvent aussi colorier les développements sur la grille 12 sur 12.

Suggestion pour le prolongement : Si les élèves constatent qu'il y a toujours trop de gaspillage lorsqu'elles et ils utilisent un seul développement à la fois, on peut leur suggérer d'utiliser une combinaison de divers développements pour recouvrir le plus de grille que possible.

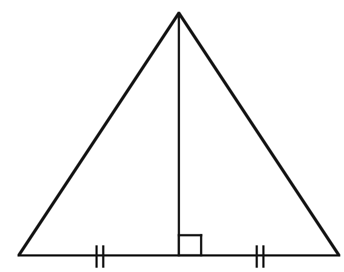
Solutions et remarques

Problème 1
On utilise le rapport du nombre de résultats favorables au nombre total de résultats possibles.

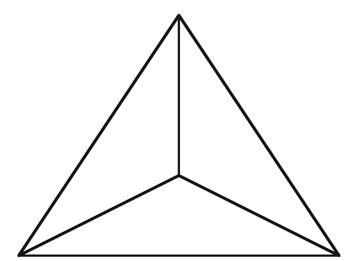
a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{1}{365}$ c) $\frac{1}{366}$ d) 0 e) $\frac{1}{365 \times 3 + 366} = \frac{1}{1461}$ f) $\frac{12}{365}$

Problème 2
Clara a recyclé le plus petit nombre de cannettes, soit 16; Thomas a recyclé le plus petit nombre de lettres, soit 101. Jamil a recyclé 80 lettres de plus que de cannettes; il y a deux possibilités, soit 102 lettres et 22 cannettes, ou 105 lettres et 25 cannettes. Or, Maryse a recyclé un total de 124 objets et une seule combinaison produit ce résultat, soit 102 + 22. Jamil a donc recyclé 105 lettres et 25 cannettes. Julie et Maryse ont recyclé 289 objets en tout; Julie a donc recyclé (289 – 124) objets, c'est-à-dire 165 objets. Une seule combinaison correspond à ce total, soit 136 lettres et 29 cannettes. Tous les nombres de cannettes ont été attribués, sauf 17. Thomas a donc recyclé 17 cannettes. De même, tous les nombres de lettres ont été attribués, sauf 138. Clara a donc recyclé 138 lettres.

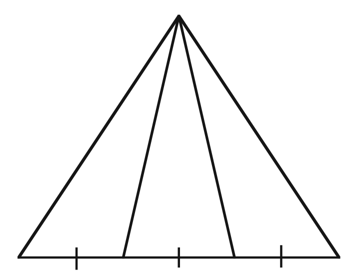
Problème 3
a) Il y a essentiellement une seule façon de couper le triangle en deux triangles ayant la même aire. On peut animer un échange pour savoir si on obtient une solution « différente » lorsqu'on trace le segment à partir d'un autre sommet.



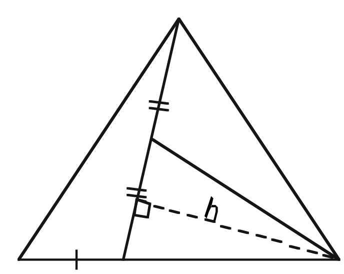
b) Une seule solution est possible si on veut obtenir trois triangles congruents. Les trois triangles ont un sommet commun qui est le centre (de gravité) du triangle équilatéral.



Les élèves savent peut-être que des triangles qui ont la même hauteur et des bases de même longueur ont alors la même aire. On peut donc diviser une base du triangle équilatéral en trois parties égales pour former trois triangles qui ont la même hauteur.



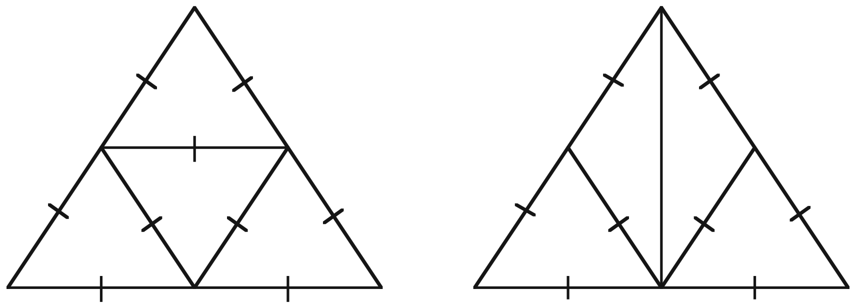
La figure ci-contre fait appel deux fois à la même idée. On conserve le triangle de gauche de la figure précédente, puis on coupe le segment en son milieu. On joint ce milieu et le sommet indiqué. L'aire du triangle de gauche est égale à un tiers du triangle équilatéral. Les deux tiers qui restent sont divisés en deux parties égales, formant deux triangles qui ont une base de même longueur et la même hauteur *h* correspondante.



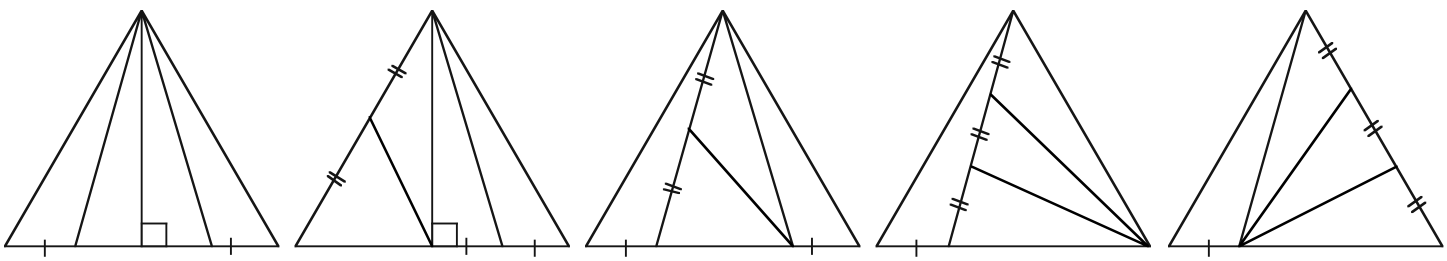
Encore une fois, on peut animer un échange pour savoir si on obtient une solution différente lorsqu'on utilise un autre côté au départ. On peut parler de rotations et de réflexions.

Prolongement

Les deux solutions les plus faciles à voir sont probablement les suivantes :

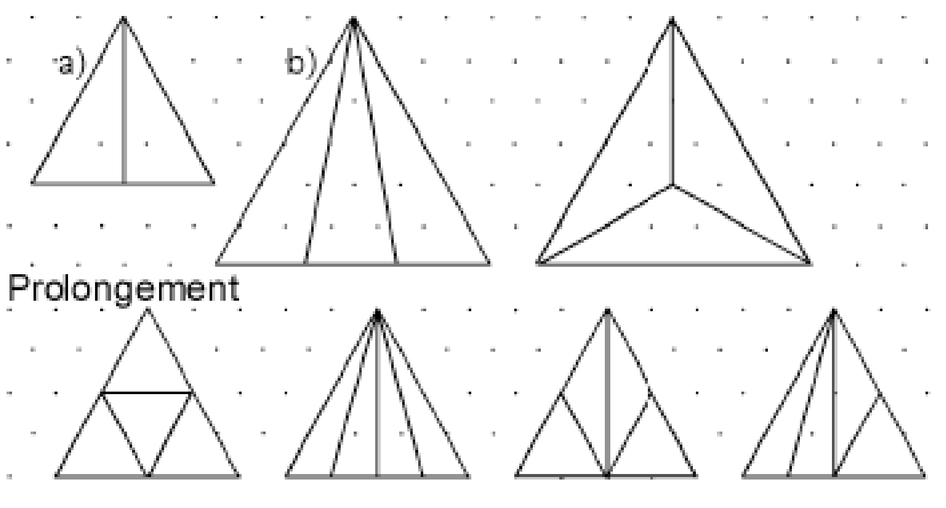


Si on fait appel à la propriété précédente, soit que deux triangles qui ont la même hauteur et une base de même longueur ont la même aire, on peut découvrir plusieurs solutions. Par exemple :



Dans les cinq figures ci-dessus, une barre simple « ı » indique que la longueur du segment est égale à 1/4 de la longueur d'un côté du triangle équilatéral. De plus, tous les segments d'*une même figure* qui portent une barre double « || » ont la même longueur, mais cette longueur peut être *différente* d'une figure à l'autre.

Remarque Le papier isométrique se prête bien à cette activité. Pour la partie a), on peut tracer un triangle équilatéral dont les côtés ont une longueur de 2 ou 4 unités. Pour la partie b), on peut tracer un triangle équilatéral dont les côtés ont une longueur de 3, 6 ou 9 unités. Pour le prolongement, les côtés peuvent avoir un multiple de 4 pour longueur. Voici quelques exemples.



Problème 4
a) Les neuf palindromes de deux chiffres sont 11, 22, 33, …, 99.

b) Il y a 9 possibilités pour les chiffres extérieurs, soit 1, 2, 3, …, 9. Pour chacun des 9 choix des chiffres extérieurs, il y a 10 possibilités pour le chiffre intérieur, soit 0, 1, 2, …, 9. Le nombre de possibilités est donc égal à 9×10. Il y a 90 palindromes de trois chiffres.

c), d) Un palindrome de quatre chiffres a la forme *mnnm*. Il y a 9 choix pour *m* et pour chacun de ces choix, il y a 10 choix pour *n*, pour un total de 9×10 choix. Le nombre de palindromes de quatre chiffres est donc le même que le nombre de palindromes de trois chiffres. On peut s'y prendre d'une autre façon : Pour chaque palindrome *mnm* de trois chiffres, on insère le chiffre *n* pour former *mnnm*. Pour chaque palindrome de trois chiffres, il y a donc un palindrome de quatre chiffres. Le nombre de palindromes de quatre chiffres est donc le même que le nombre de palindromes de trois chiffres.

e) Le nombre de palindromes de 3 ou 4 chiffres, soit 90, est égal à 10 fois le nombre de palindromes de 1 ou 2 chiffres.

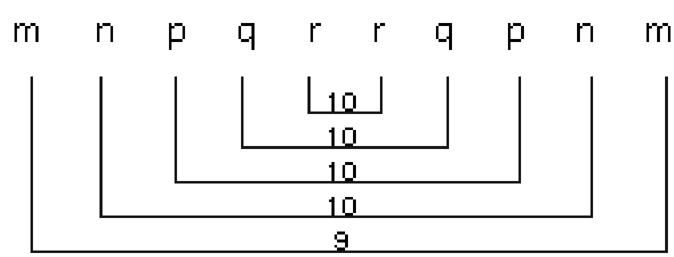
Prolongement 1 : Chaque palindrome de quatre chiffres est divisible par 11. (On peut l'expliquer de façon algébrique : le palindrome *mnnm* est égal à $1000 \times m + 100 \times n + 10 \times n + m$, ce qui est égal à $1001 \times m + 110 \times n$. Or, les nombres 1001 et 110 sont tous deux divisibles par 11. On peut donc écrire la valeur du palindrome sous la forme $11 \times (91 \times m + 10 \times n)$, ce qui démontre que 11 est un diviseur. Par exemple, le palindrome 3553 est égal à $3 \times 1000 + 5 \times 100 + 5 \times 10 + 3$, ce qui est égal à $1001 \times 3 + 110 \times 5$. Puisque 11 est un diviseur de 1001 et de 110, il est aussi un diviseur du nombre $1001 \times 3 + 110 \times 5$.

Prolongement 2 : On peut passer au nombre de palindromes de 5 ou 6 chiffres de la même manière que pour le nombre de palindromes de 3 ou 4 chiffres. Étant donné un des 90 palindromes *mnnm* de 4 chiffres, on peut insérer un chiffre *p*, choisi parmi les 10 chiffres de 0 à 9, pour obtenir le palindrome *mnpnm*. Le nombre de palindromes de 5 chiffres est donc égal à 90×10, c'est-à-dire à 900. Il y a aussi 900 palindromes *mnppnm* de 6 chiffres.

Nombre de chiffres	**Nombre de palindromes**
1	9
2	9
3	90
4	90
5	900
6	900
7	9000
10	90 000

Un palindrome de 7 chiffres est de la forme *mnpqpnm*. Pour chacun des 900 palindromes de 6 chiffres, de la forme *mnppnm*, il y a 10 choix du chiffre *q*. Il y a donc 900×10 choix, c'est-à-dire 9000 palindromes de 7 chiffres.

Pour les palindromes de 10 chiffres, on peut prolonger la régularité : 9, 9, 90, 90, 900, 900, 9000, 9000, 90 000, 90 000. On peut expliquer le résultat au moyen du schéma ci-contre.



La paire de chiffres extérieurs peut être choisie de 9 façons. Pour chaque choix, la paire de chiffres intérieurs adjacents peut être choisie de 10 façons, etc.
En tout, le nombre de choix est égal à $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$, c'est-à-dire à 90 000.
Il y a donc 90 000 palindromes de 10 chiffres.

Problème 5
a) Le périmètre du stationnement A est égal à 260 mètres ($2 \times 40 + 2 \times 90$).
Puisque le stationnement carré B a le même périmètre, chacun de ses côtés mesure 65 mètres ($260 \div 4$). L'aire du stationnement B est égale à 4225 mètres carrés (65×65).
L'aire du stationnement B moins l'aire du stationnement A est égale à 625 mètres carrés ($4225 - 3600$).

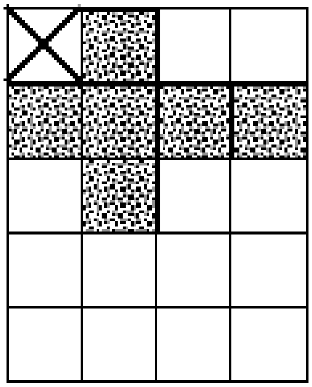
b) On sait que si un rectangle a une longueur de L mètres et une largeur de l mètres, son aire est égale à ($L \times l$) mètres carrés. On cherche donc des nombres naturels L et l de manière que $L \times l = 3600$. De plus, ni L, ni l ne doit être inférieur à 20. Pour réussir, il faut examiner toutes les paires de facteurs de 3600 de façon systématique.
Voici les produits permis :
20×180, 24×150, 25×144, 30×120, 36×100, 40×90, 48×75, 50×2, 60×60 et 80×45.
Si vous le voulez, vous pouvez animer un échange pour décider si 40×90 est le même stationnement que 90×40. Si vous décidez que oui, on conclut qu'il y a 9 autres stationnements rectangulaires qui ont la même aire que A. Si vous décidez que non, on ajoute les 9 produits 180×20, 150×24, etc., pour conclure qu'il y a 18 autres stationnements rectangulaires qui ont la même aire que A.

Prolongement : Puisque le stationnement A a un périmètre de 260 mètres, un autre stationnement qui a le même périmètre doit avoir une longueur et une largeur qui ont une somme de 130 mètres. De plus, la largeur doit mesurer au moins 20 mètres. Voici les façons possibles d'obtenir $L + l = 130$: $20 + 110$, $21 + 109$, $22 + 108$, …, $110 + 20$. Il y en a 91. En plus du stationnement A, il y en a 90 autres. Cela suppose qu'un stationnement de dimensions 20×110 est différent d'un stationnement de dimensions 110×20. Si vous décidez que ces deux stationnements sont identiques, il y a alors 46 stationnements différents; en plus du stationnement A, il y en a 45 autres.

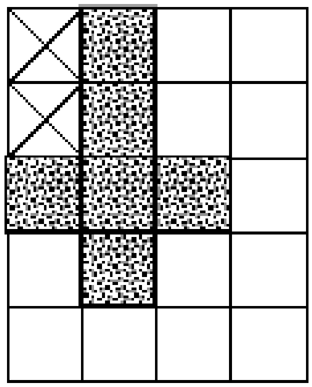
Problème 6
Au départ, on doit accepter qu'avec des outils mathématiques de 5^e ou 6^e année, il est impossible de démontrer qu'une façon particulière de placer les gabarits sur le quadrillé nous donnera un gaspillage minimal. Il s'agit donc d'un problème ouvert, comme c'est souvent le cas dans la vie. Voici quelques commentaires et quelques façons de placer les divers gabarits.

Les élèves devraient constater que peu importe comment le gabarit formé du Développement 1 est placé dans le coin supérieur gauche, il y aura aussitôt un ou deux carreaux gaspillés. Ils sont indiqués par un « X » dans les deux premières figures. Ce n'est pas le cas des deux autres gabarits, comme on peut le voir dans les deux figures suivantes.

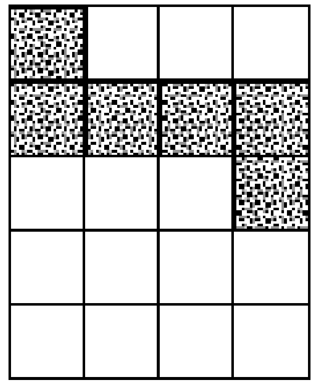
Développement 1



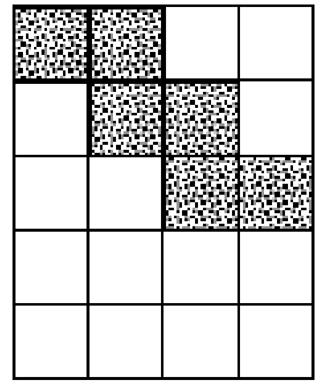
Développement 1



Développement 2



Développement 3



Dans la Figure 1, on a placé 5 copies du Développement le plus près les unes des autres de manière à minimiser le gaspillage. Comme on peut le voir dans la Figure 2, on doit gaspiller plusieurs carreaux pour placer la 6e copie. Dans la Figure 3, on voit que l'on peut ensuite placer les copies 7 à 10 sans autre gaspillage, mais on doit gaspiller plusieurs carreaux pour placer la 11e copie.

Figure 1

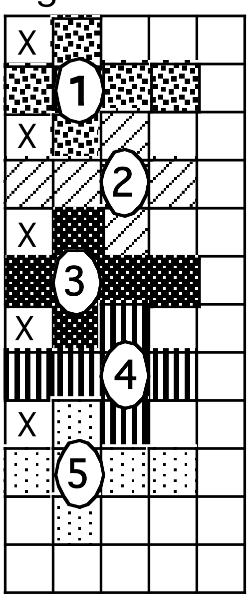


Figure 2

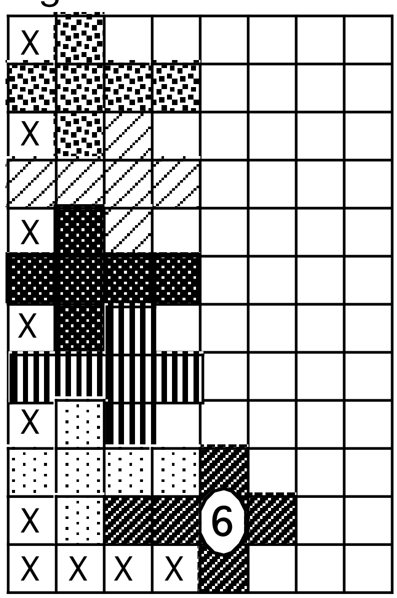
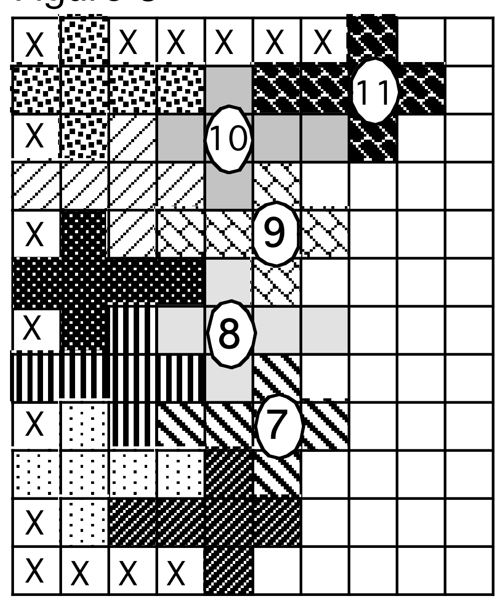
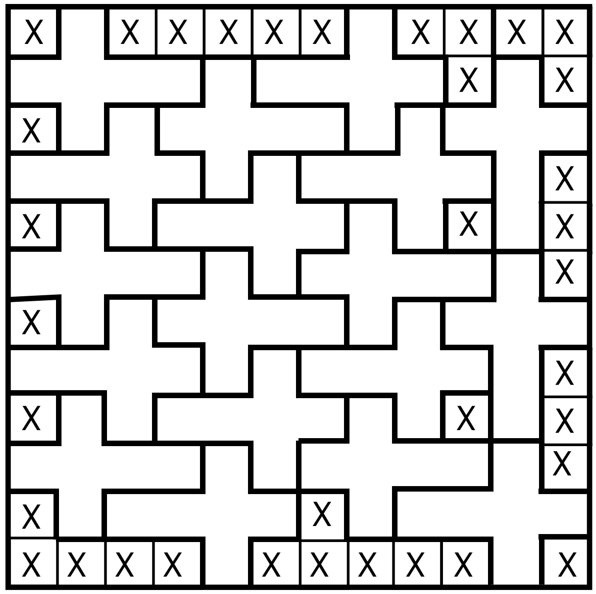


Figure 3



On continue de la sorte pour obtenir le résultat illustré dans la Figure 4. Dans cette solution, on a gaspillé 36 carreaux. On peut mettre les élèves au défi de trouver une solution avec moins de gaspillage.

Figure 4



Comme on le voit dans la Figure 5, il est possible de placer un gabarit du Développement 2 dans le coin supérieur gauche sans gaspiller. Comme on le voit dans les Figures 6 et 7, il est impossible de placer la deuxième copie du gabarit sans gaspiller.

Figure 5

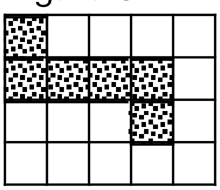


Figure 6

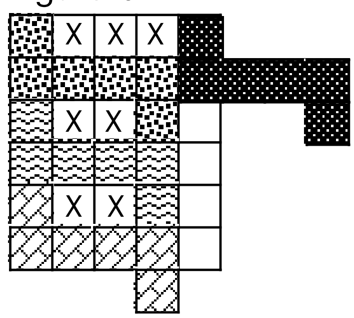
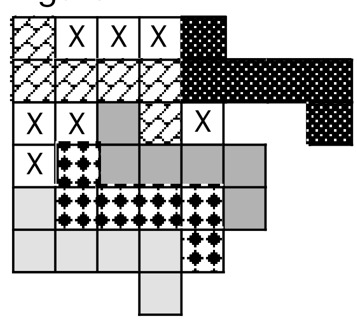
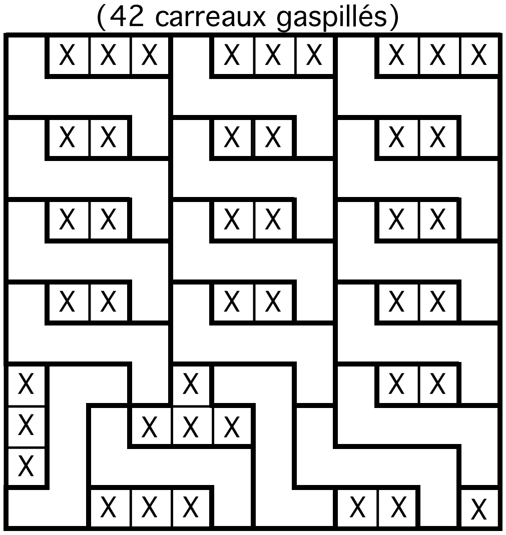


Figure 7

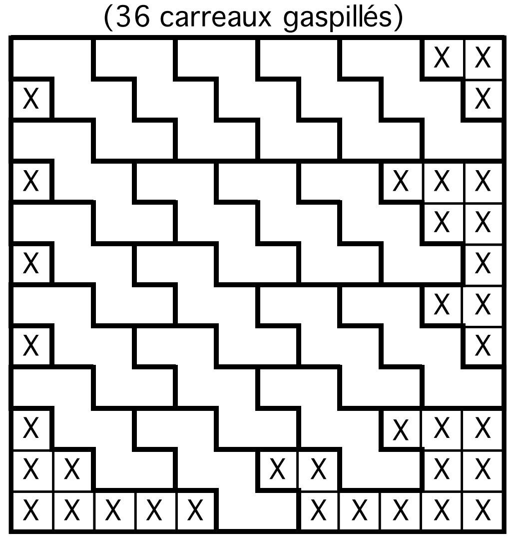


Il en est de même pour un gabarit du Développement 3. Voici deux solutions possibles.

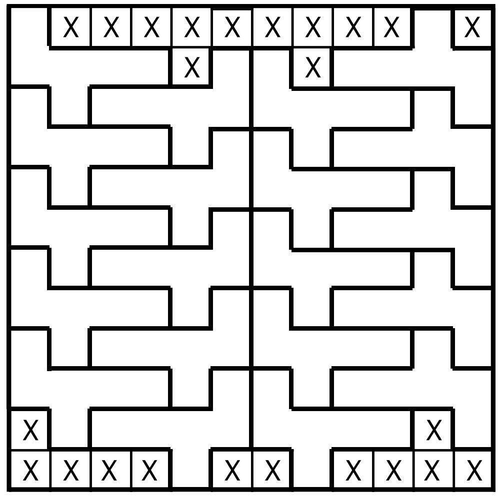
Développement 2
(42 carreaux gaspillés)



Développement 3
(36 carreaux gaspillés)

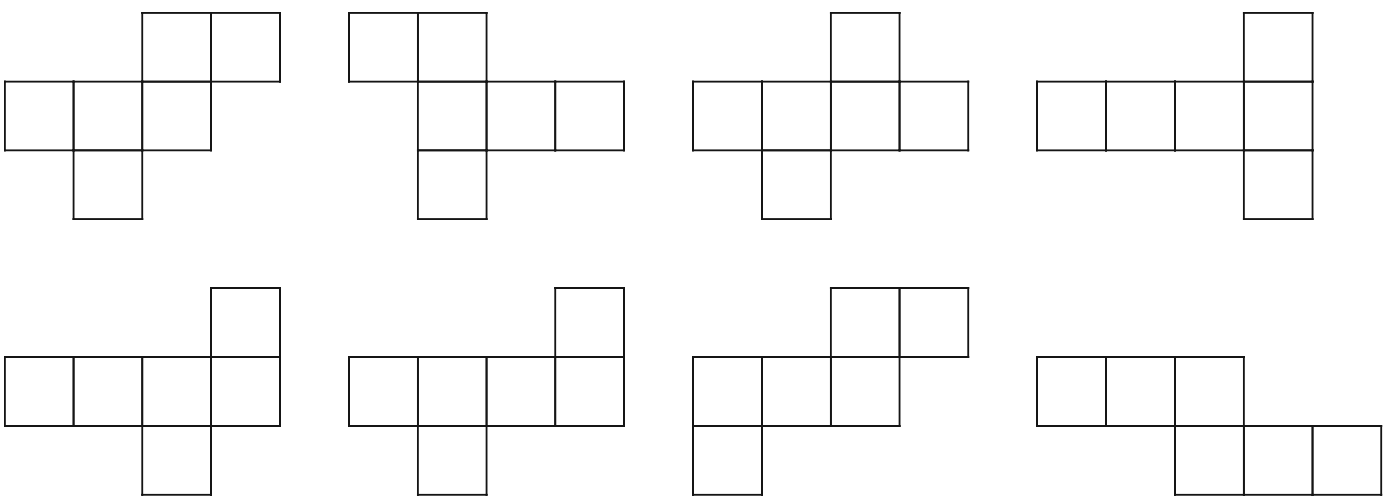


Dans la solution suivante, on a utilisé un autre développement. On ne gaspille que 24 carreaux.



Suggestion : Demander aux élèves d'un groupe de comparer leur solution à celles des autres groupes. Leur demander de formuler une hypothèse quant au développement du cube qui pourrait produire le moins de gaspillage, tout en indiquant la raison de leur choix.

Prolongement : Voici les huit autres développements possibles du cube.



Si les élèves explorent l'utilisation d'autres développements, leur demander s'il serait raisonnable de supposer qu'il y aurait moins de gaspillage si on utilisait plusieurs développements en même temps. Discuter des inconvénients que ça pourrait produire. Par exemple, si le pliage est fait par une machine, il faudrait programmer la machine pour qu'elle reconnaisse chaque gabarit afin de le plier convenablement. Si on doit imprimer un texte sur les côtés des boîtes, il faudrait prévoir un grand nombre de façons de placer le texte pour qu'il soit en bonne position une fois que les boîtes sont pliées.