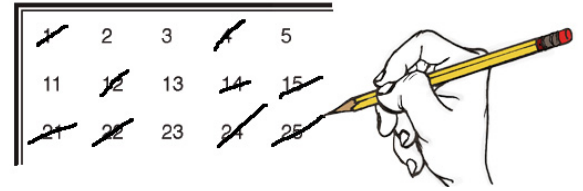


Problème

Sur le tableau de 100 ci-dessous:

- Barre le nombre 1.
- Laisse le nombre 2, mais barre les autres multiples de 2.
- Laisse le nombre 3, mais barre les autres multiples de 3.
- Laisse le nombre 5, mais barre les autres multiples de 5.
- Laisse le nombre 7, mais barre les autres multiples de 7.



Dans l'espace à la droite du tableau, écris tous les nombres qui ne sont PAS barrés.

INDICE: Il devrait y avoir 24 nombres dans cette liste.

Tableau de 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Liste des nombres restants

- a) Écris les diviseurs de chaque nombre de la « Liste des nombres restants ». Qu'est-ce que ces nombres ont en commun? On dit que ces nombres sont des *nombres premiers*.
- b) Le *résidu* d'un nombre est le nombre obtenu en additionnant tous ses chiffres, puis en additionnant les chiffres du résultat, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un nombre d'un seul chiffre. Par exemple, on obtient le résidu du nombre 37 comme suit: $37 \rightarrow 3 + 7 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$, ce qui donne un résidu de 1.
 - (i) Dans ta liste ci-dessus, combien y a-t-il de nombres qui ont un résidu de 2?
 - (ii) Combien y en a-t-il qui ont un résidu de 6?
- c) On considère les nombres entiers de 1 à 99.
 - (i) Explique pourquoi si un de ces nombres a un résidu de 6, alors la somme de ses chiffres doit être égale à 6 ou à 15.

(ii) Écris tous les nombres entiers, de 1 à 99, qui ont un résidu de 6.

INDICE: Il y en a 11.

(iii) Écris une phrase qui résume ce que tu as découvert dans les parties b) et c).

Prolongements

1. Détermine tous les nombres entiers, de 101 à 199, qui ont un résidu de 6.
2. Démontre que si un nombre de 1 à 99 a un résidu de 6, alors il est divisible par 3.

Indices

Suggestions

On pourrait déterminer la liste des nombres restants et peut-être répondre à la question a) en groupe-classe en guise d'introduction aux questions des parties b) et c) qui provoquent plus de réflexion.

Solution

- a) Le tableau suivant présente les nombres premiers restants et leur résidu. On remarque que chacun des nombres restants n'admet que deux diviseurs, soit 1 et le nombre lui-même.

Nombre	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
Résidu	2	3	5	7	2	4	8	1	5	2	4	1	5	7

Nombre	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97
Résidu	2	8	5	7	4	8	1	7	2	8	7

- b) (i) Chacun des nombres premiers 2, 11, 29, 47 et 83 a un résidu de 2. Il y en a cinq.

(ii) Aucun de ces nombres n'a un résidu de 6.

- c) (i) Parmi les nombres 1, 2, 3, ..., 9, seul 6 a un résidu de 6.

On considère maintenant la somme des chiffres des nombres de 10 à 99. Cette somme varie de 1 (pour le nombre 10) à 18 (pour le nombre 99). Si cette somme est égale à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, il s'agit du résidu du nombre. Seule la somme de 6 donne un résidu de 6. Si la somme des chiffres est égale à 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 ou 18, seule sa somme de 15 donnera un résidu de 6.

Donc, parmi les nombres de 1 à 99, ceux dont la somme des chiffres est égale à 6 ou à 15 ont un résidu de 6.

(ii) Les nombres dont la somme des chiffres est égale à 6 sont 6, 15, 24, 33, 42, 51 et 60. Ceux dont la somme des chiffres est égale à 15 sont 69, 78, 87 et 96. Donc, les nombres de 1 à 99 qui ont un résidu de 6 sont 6, 15, 24, 33, 42, 51, 60, 69, 78, 87 et 96.

(iii) Parmi les 26 nombres premiers de 1 à 100, cinq ont un résidu de 2 et aucun n'a un résidu de 6. Parmi les nombres entiers de 1 à 99, 11 nombres ont un résidu de 6.

Prolongements

1. On considère les sommes des chiffres des nombres entiers de 101 à 199. Comme dans la partie c), seules les sommes de 6 ou de 15 donnent un résidu de 6. Pour trouver rapidement les nombres qui ont un résidu de 6, on peut trouver ceux dont la somme du chiffre des dizaines et du chiffre des unités est égale à 5 ou à 14, puisque le chiffre des centaines est égal à 1. Ces nombres sont 105, 114, 123, 132, 141, 150, 159, 168, 177, 186 et 195. Il y en a 11.
2. On sait qu'un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3. Or, les nombres de 1 à 99 qui ont un résidu de 6 ont une somme de leurs chiffres égale à 6 ou à 15 et ces deux sommes sont divisibles par 3. Donc, ces nombres sont divisibles par 3 et ne peuvent pas être des nombres premiers. De la même manière, un nombre qui a un résidu de 9 est divisible par 9 et ne peut pas être un nombre premier.