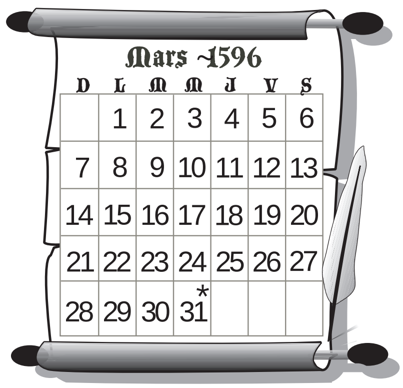
Problème

On voit ci-dessous les pages du calendrier de mars 1596, de mai 1718 et de mars 1882. Utilise ces calendriers et réponds aux questions suivantes pour découvrir des régularités.



* naissance de René Descartes

* naissance de Maria Gaetana Agnesi

* naissance de Emmy Noether

a) Choisis un nombre dans la troisième semaine d'un des calendriers.

(i) Comment ce nombre est-il relié au nombre qui est situé directement au-dessus de lui?

(ii) Comment ce nombre est-il relié au nombre qui est situé directement au-dessous de lui?

(iii) Cette relation est-elle vraie pour n'importe quelle page d'un calendrier?

Explique tes réponses.

b) Choisis un nombre au milieu d'une semaine d'un des calendriers.

(i) Comment ce nombre est-il relié au nombre qui est situé directement à sa droite?

(ii) Comment ce nombre est-il relié au nombre qui est situé directement à sa gauche?

(iii) Cette relation est-elle vraie pour n'importe quelle page d'un calendrier?

Explique tes réponses.

c) Choisis un nombre près du milieu d'un des calendriers. On l'appellera n. Les huit nombres autour de n, avec n, forment un carré de neuf nombres. Ci-dessous, on voit un exemple d'un tel carré autour du nombre 14. (Utilise le même carré pour répondre aux questions (i), (ii), (iii) et (iv).)

(i) Dans ce carré de neuf nombres, choisis deux ensembles de trois nombres ayant chacun la même somme et de manière que la moyenne des trois nombres soit égale à n dans les deux cas.

(ii) Trouve deux autres tels ensembles de trois nombres, différents de ceux de la partie (i).

(iii) Si tu avais choisi un autre nombre du milieu n, pourrais-tu choisir quatre ensembles de trois nombres de la même manière? Discute avec une ou un camarade qui a choisi un nombre différent. Explique ta réponse.

(iv) Y a-t-il deux ensembles de trois nombres, dans ce carré, qui ont la même somme, mais dont la moyenne n'est PAS égale à n? S'il y en a, écris-les.

6	7	8
13	14	15
20	21	22

Prolongements

1. (i) La figure ci-contre montre un carré de 9 cases. Il est tiré d'une page de calendrier, comme dans la figure précédente, mais il présente une forme plus générale, où le nombre du milieu est représenté par n. Remarque comment n est relié aux huit autres nombres, puis remplis le tableau en écrivant les nombres en fonction de n.
   INDICE : Utilise tes résultats des parties a) et b) ci-dessus.

$n - 8$		
	n	
$n+6$		

   (ii) Utilise ce carré rempli pour expliquer pourquoi des ensembles de trois nombres choisis comme dans les parties c)(i) et (ii), ci-dessus, auront toujours une moyenne de n, tandis que ceux choisis comme dans la partie c(iv) n'auront pas cette moyenne.

2. Écris un bref paragraphe sur chacun des mathématiciens René Descartes, Maria Agnesi et Emmy Noether. Tu peux consulter des livres de référence ou Internet.

Indices

Partie c)

1er indice - La somme des trois nombres d'une rangée peut-elle être la même que celle d'une autre rangée? Pourquoi ou pourquoi pas?

2e indice - La somme des trois nombres d'une colonne peut-elle être la même que celle d'une autre colonne? Pourquoi ou pourquoi pas?

3e indice - Y a-t-il une rangée dont la somme des nombres est la même que celle d'une colonne?

4e indice - Comment la somme des nombres d'une diagonale se compare-t-elle à celle de l'autre diagonale?

5e indice - Est-il nécessaire de s'en tenir à une rangée, une colonne ou une diagonale?

Solution

Si on choisit le nombre au milieu de la troisième rangée du deuxième calendrier, soit $n = 14$, on obtient le carré ci-contre de 9 nombres. On peut l'utiliser pour illustrer les solutions des parties a), b) et c), ci-dessous. Dans chaque cas, on a placé entre parenthèses les réponses particulières qui correspondent à ce carré de 9 nombres.

6	7	8
13	14	15
20	21	22

a) Le nombre au milieu (14) est 7 de plus que le nombre (7) situé directement au-dessus de lui et 7 de moins que le nombre (21) situé directement au-dessous de lui, puisqu'il y a une différence d'une semaine, ou 7 jours, d'un jour à l'autre. Ce serait le cas de n'importe quelle page d'un calendrier dont les dates sont placées à l'horizontale en rangées de 7 jours.

b) Le nombre au milieu (14) est 1 de plus que le nombre (13) situé directement à sa gauche et 1 de moins que le nombre (15) situé directement à sa droite. Ce serait le cas de n'importe quelle page d'un calendrier dont les dates sont placées à l'horizontale.

c) Dans les parties (i), (ii) et (iii), il est important de remarquer que trois nombres ont une moyenne égale à n (14) si leur somme est égale à $3n$ (42). Il existe plusieurs tels ensembles de trois nombres qui contiennent n comme nombre du milieu. D'après les parties a) et b), les choix les plus évidents qui contiennent le nombre n (14) sont ceux de la colonne du milieu ($7 + 14 + 21 = 42$), ceux de la rangée du milieu ($13 + 14 + 15 = 42$), de même que ceux des diagonales ($6 + 14 + 22 = 42$ ou $8 + 14 + 20 = 42$). Dans chaque cas, l'écart entre le premier nombre et n est le même que l'écart entre n et le troisième nombre.

Voici d'autres ensembles (qui ne contiennent PAS le nombre n): 1$^{\text{re}}$ rangée à droite + 2$^{\text{e}}$ rangée à gauche + 3$^{\text{e}}$ rangée au milieu ($8 + 13 + 21 = 42$) ou 1$^{\text{re}}$ rangée à gauche + 2$^{\text{e}}$ rangée à droite + 3$^{\text{e}}$ rangée au milieu ($6 + 15 + 21 = 42$) ou 1$^{\text{re}}$ rangée au milieu + 2$^{\text{e}}$ rangée à droite + 3$^{\text{e}}$ rangée à gauche ($7 + 15 + 20 = 42$). Dans chacun de ces exemples, il s'agit de choisir trois nombres de manière que chacun est situé dans une rangée et une colonne différentes de celles des deux autres nombres, ce qui garantit que leur somme est égale à $3n$.

Pour la partie (iv), où l'on cherche deux ensembles de trois nombres qui ont la même somme, mais PAS égale à $3n$, on peut choisir, par exemple, 1$^{\text{re}}$ rangée à gauche + 2$^{\text{e}}$ rangée au milieu + 3$^{\text{e}}$ rangée à droite ($6 + 21 + 22 = 49$) et 1$^{\text{re}}$ rangée à droite + 3$^{\text{e}}$ rangée à gauche + 2$^{\text{e}}$ rangée au milieu ($8 + 20 + 21 = 49$). (D'autres choix sont possibles.)

Prolongement

1. Si on tient compte de la relation entre le nombre n, au milieu, et les autres nombres, on obtient le carré ci-contre. Ainsi, la somme des nombres d'une diagonale est égale à $(n - 8 + n + n + 8)$, ou $3n$; la somme des nombres de l'autre diagonale est égale à $(n + 6 + n + n - 6)$, ou $3n$. (On peut démontrer, de la même manière, que la somme des nombres choisis dans les parties a), b) et c) (i), (ii) est égale à $3n$.) Par contre, les ensembles de trois nombres choisis dans la partie c)(iv) ont une somme égale à $(n - 8 + n + 7 + n + 8)$ et $(n - 6 + n + 6 + n + 7)$, soit $3n + 7$. (D'autres choix de nombres donneront d'autres sommes.)

$n - 8$	$n - 7$	$n - 6$
$n - 1$	n	$n + 1$
$n + 6$	$n + 7$	$n + 8$