Partie 2 : À l'intention de l'enseignante ou de l'enseignant

Domaines

Problème 1 - Mesure et Résolution de problèmes

Problème 2 - Modélisation et algèbre

Problème 3 - Traitement de données et Résolution de problèmes

Problème 4 - Mesure et Numération et sens du nombre

Problème 5 - Géométrie et sens de l'espace

Problème 6 - Mesure

Indices et suggestions

Problème 1

1er indice - Qui devrait traverser en premier ?

2e indice - Qui ramènera l'embarcation ?

3e indice - Un père peut-il traverser avec son fils ?

4e indice - Qui traversera dernier ?

Suggestion : Demander aux élèves de mimer les traversées en groupes de 4 où chaque élève représente un des personnages.

Problème 2

1er indice - b) Si tu joues une note verte après chaque riff de deux notes de la partie a), combien obtiens-tu de riffs de trois notes ? Pourquoi ?

2e indice - c) Comment peux-tu utiliser ta réponse de la partie b) pour obtenir le nombre possible de riffs de 4 notes ?

Problème 3

1er indice - a) Si les nombres sont placés en ordre croissant, lequel est égal à 5 ?

2e indice - a) Combien de 1 doit-il y avoir dans l'ensemble ?

3e indice - a) Quelle est la somme des cinq nombres ?

4e indice - b) Quelle est la somme des six nombres ?

Problème 4

1er indice - a) Si Abélard avait 2000 \$, combien aurait-il de billets de 10 \$? Comment as-tu obtenu ta réponse ?

2e indice - b) Combien dépensera-t-il dans une année ?

3e indice - c) Combien y a-t-il de feuilles de papier dans une pile de 1 cm ? Dans une pile de 2 cm ?

Prolongement

1er indice - Quelles sont les dimensions d'un sac d'école ?

2e indice - Combien de billets pourrait-on placer côte à côte au fond du sac ?

Suggestion : Demander aux élèves de mesurer plusieurs sacs d'école et d'en venir à un consensus sur les dimensions d'une boîte qui pourrait représenter le sac à dos.

Problème 5

1er indice - a) Quelle est l'aire du triangle ABC ?

2e indice - a) Quelle est la hauteur du triangle BDE ? Par rapport à quelle base ? Quelle est la hauteur du triangle BEF ? Par rapport à quelle base ? Quelle est la hauteur du triangle BAF ? Par rapport à quelle base ?

3e indice - a) Quelle est l'aire du triangle BAF ?

4e indice - c) Si deux triangles ont la même aire, sont-ils nécessairement congruents ?

Prolongement

1er indice - Si on joint les sommets de l'hexagone au centre de l'hexagone, quelles figures obtient-on ?

Suggestions

1. Il peut être utile de revoir l'aire des triangles avec les élèves, ainsi que le sens du mot « congruent » avant de présenter ce problème.
2. Le prolongement peut être résolu facilement si les élèves découpent l'étoile, puis replient les triangles extérieurs vers l'intérieur de l'hexagone.
3. On peut faire travailler les élèves en groupes.

Problème 6

1er indice - a) Combien y a-t-il de millimètres cubes dans un centimètre cube ?

2e indice - b) Si les 24 MP3 étaient empilés en trois piles de 8, quelles pourraient être les dimensions de la boîte ? Peux-tu penser à les empiler différemment ?

3e indice - c) Quelles sont les longueurs des côtés de la boîte que tu as conçue dans la partie b) ? Combien y a-t-il de paires de côtés identiques ?

Prolongement

1er indice - Si les 24 MP3 étaient empilés en trois piles de 8, quelles pourraient être les dimensions de la boîte ? Peux-tu penser à les empiler différemment ?

Solutions

Problème 1

L'idée principale dont il faut tenir compte, c'est que l'embarcation doit revenir après chaque traversée, sauf pour la dernière. Il doit donc y avoir quelqu'un, sur l'autre rive, pour ramener l'embarcation. Le tableau suivant résume les 9 traversées nécessaires. Les personnes présentes dans l'embarcation sont représentées par leur initiale, soit H pour Hans, M pour Michel, S pour Samuel et T pour Toni. La position de chacun APRÈS la traversée indiquée, d'un côté ou de l'autre de la rivière, est donnée dans les deux dernière colonnes. (On peut obtenir d'autres solutions en changeant l'un pour l'autre H et S, ou M et T.)

Traversée	Traversent vers l'autre rive	Reviennent de l'autre vire	Se trouvent sur la 1re rive	Se trouvent sur l'autre rive
1	M, T		H, S	M, T
2		M	H, S, M	T
3	S		H, M	T, S
4		T	H, M, T	S
5	M, T		H	S, M, T
6		M	H, M	S, T
7	H		M	S, T, H
8		T	M, T	S, H
9	M, T			S, H, M, T

Suggestion : Demander comment on sait qu'il s'agit du plus petit nombre de traversées. Une discussion animée devrait s'ensuivre.

Problème 2

a) Trois couleurs sont disponibles, soit V, R et J. Pour compter les riffs possibles, on peut décrire ceux qui commencent par V, puis ceux qui commencent par R, puis ceux qui commencent par J. Il y a donc 3 ensembles de 3 riffs, soit VV, VR, VJ, puis RV, RR, RJ et JV, JR, JJ. Le nombre de riffs de deux notes est donc égal à 3×3, ou 9.

b) La façon la plus facile de s'y prendre, c'est d'ajouter une note à chacun des riffs de deux notes. Puisqu'on peut ajouter V, R ou J à chacun des 9 riffs de 2 notes, il y a 3×9 riffs, soit 27 riffs de 3 notes.

c) De la même façon, il y a 3 fois plus de riffs de 4 notes que de riffs de 3 notes, pour un total de 3×27 riffs, soit 81 riffs de 4 notes. De même, il y a 3×81 riffs, soit 243 riffs de 5 notes.

Nombre de notes	Nombre de riffs
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243

Problème 3

a) L'ensemble contient cinq nombres. Puisque le mode est égal à 1, ce nombre doit paraître au moins deux fois. Puisque la médiane est égale à 5, le nombre du milieu est 5. On a donc, en ordre croissant, 1, 1, 5, __, __.
Puisque la moyenne est égale à 4, la somme des cinq nombres doit être égale à 5×4, soit 20. (Par définition, la moyenne est égale à $\frac{\text{somme}}{5}$. Donc $4 = \frac{\text{somme}}{5}$. La somme est donc égale à 20, car $20 \div 5 = 4$.) Puisque les trois premiers nombres ont une somme de 7, les deux derniers nombres doivent avoir une somme de 13. Les deux derniers nombres semblent pouvoir être 5 et 8 ou 6 et 7. Or, on ne peut pas avoir un autre 5, puisque le mode est égal à 1. Les deux derniers nombres sont donc 6 et 7. Donc, les cinq nombres sont 1, 1, 5, 6 et 7.

b) Puisque le mode est égal à 1, alors les deux premiers nombres doivent être des 1. (Il pourrait y avoir plus de deux 1.) Puisque les nombres ont une étendue de 28, le dernier nombre doit être 29. On a donc, en ordre croissant, 1, 1, __, __, __, 29. Puisque les nombres ont une moyenne de 14,5, ils doivent avoir une somme de $6 \times 14{,}5$, soit 87. Puisque les trois nombres connus ont une somme de 31, les trois autres nombres doivent avoir une somme de 56 ($87 - 31 = 56$). Donc, Abélard peut donner comme solution n'importe quel ensemble 1, 1, M, N, P, 29, où M, N et P sont trois entiers qui ne dépassent pas 29, mais de sorte que l'entier 1 paraisse le plus souvent. Voici quelques exemples de solutions : {1, 1, 1, 10, 25, 29}, {1, 1, 15, 18, 23, 29}, {1, 1, 16, 19, 21, 29}. Le problème admet donc plus d'une solution.

Problème 4

a) Puisque $1\,000\,000\,\$ = 100\,000 \times 10\,\$$, Abélard a reçu 100 000 billets de 10 $.

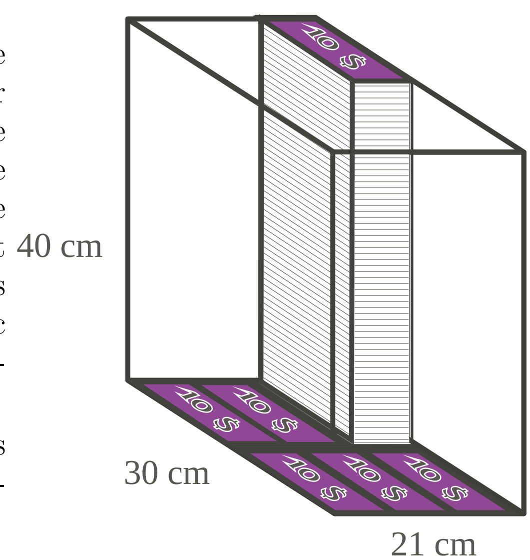
b) S'il dépense 500 $ par semaine, dans un an il dépensera $52 \times 500\,\$$, soit 26 000 $. Puisque $1\,000\,000 \div 26\,000 = 38{,}46$, Abélard mettrait environ 38 ans et demi pour dépenser un million de dollars.

c) D'après la figure, 500 feuilles de papier ont une hauteur de 5 cm. Puisque les billets ont la même épaisseur qu'une feuille, alors 500 billets de 10 $ ont une hauteur de 5 cm. Donc, 1000 billets ont une hauteur de 10 cm. Or, un million de dollars correspond à 100 000 billets de 10 $, alors 100 000 billets ont une hauteur de 100×10 cm, soit 1000 cm, ce qui correspond à 10 m.

Prolongement

1. Supposons qu'un sac d'école correspond à une boîte ayant une largeur de 30 cm, une hauteur de 40 cm et une profondeur de 21 cm. La base mesure alors 21 cm sur 30 cm. Puisque les billets mesurent 7 cm sur 15 cm, on peut placer 6 piles de billets dans le sac, comme l'illustre la figure ci-contre. Chaque pile de 40 cm peut contenir 4000 billets, car 1000 billets ont une hauteur de 10 cm. Les 6 piles vont contenir 24 000 billets de 10 $, car $6 \times 4000 = 24\,000$. Un sac d'école pourrait donc contenir 240 000 $, soit environ un quart d'un million de dollars.

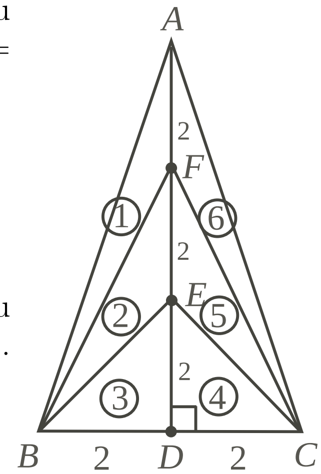
   Remarque : Les réponses vont varier, selon les dimensions choisies. Il faudrait un sac gigantesque pour contenir tout l'argent !



Problème 5

Tout repose sur le fait que les six petits triangles ont la même aire. En effet, les triangles ont tous une base (AF, FE ou ED) de longueur 2 et une hauteur (BD ou DC) de longueur 2.

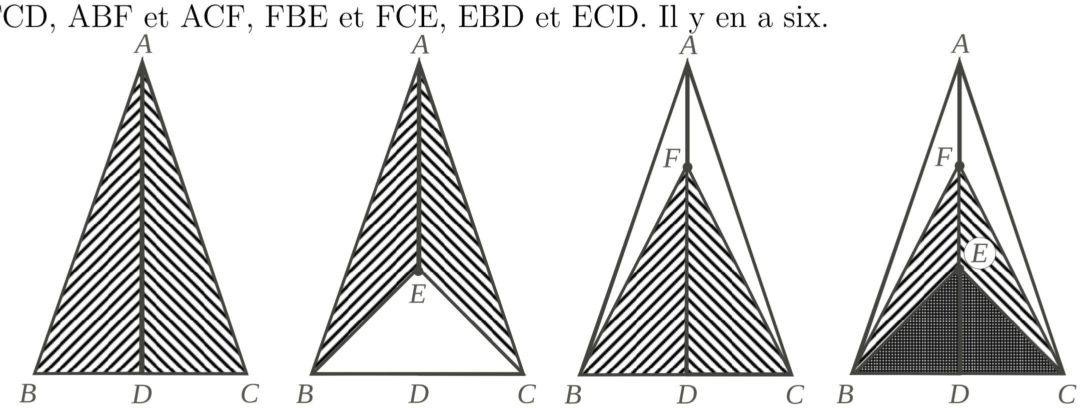
Les triangles ont donc tous une aire égale à $\frac{1}{6}$ de l'aire du triangle ABC.



a) Pour colorier une section de la figure qui a une aire égale à $\frac{1}{2}$ de l'aire du triangle ABC, il suffit de colorier 3 petits triangles, puisque $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Il y a 20 façons de le faire, soit en coloriant les triangles :
(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 4, 6), (1, 5, 6) ;
(2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 4, 6), (2, 5, 6) ;
(3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6) ; (4, 5, 6)

b) Pour colorier une section de la figure qui a une aire égale à $\frac{1}{3}$ de l'aire du triangle ABC, il suffit de colorier 2 petits triangles, puisque $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Il y a 15 façons de le faire, soit en coloriant les triangles :
(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) ; (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) ;
(3, 4), (3, 5), (3, 6) ; (4, 5), (4, 6) ; (5, 6)

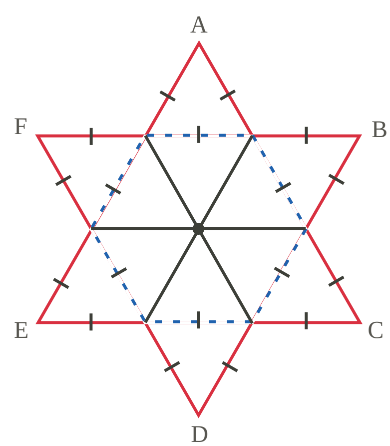
c) La figure est symétrique par rapport à l'axe AD. On trouve les paires de triangles congruents en utilisant cette symétrie. Les triangles congruents sont : ABD et ACD, ABE et ACE, FBD et FCD, ABF et ACF, FBE et FCE, EBD et ECD. Il y en a six.



Prolongement

1. a) Puisque tous les petits segments ont la même longueur, les triangles à l'extérieur de l'hexagone ont trois côtés de même longueur. Les triangles sont donc équilatéraux et leurs angles mesurent tous 60°.

   b) Si on découpait la figure et qu'on pliait les petits triangles le long des lignes à tirets, les sommets A, B, C, D, E, F se rencontreraient au centre de l'hexagone et les triangles rempliraient l'hexagone. (Voir le Cercle 1 d'Emmy Noether de 2010-2011, problème 6 d) pour un problème associé qui touche aux hexagones.)



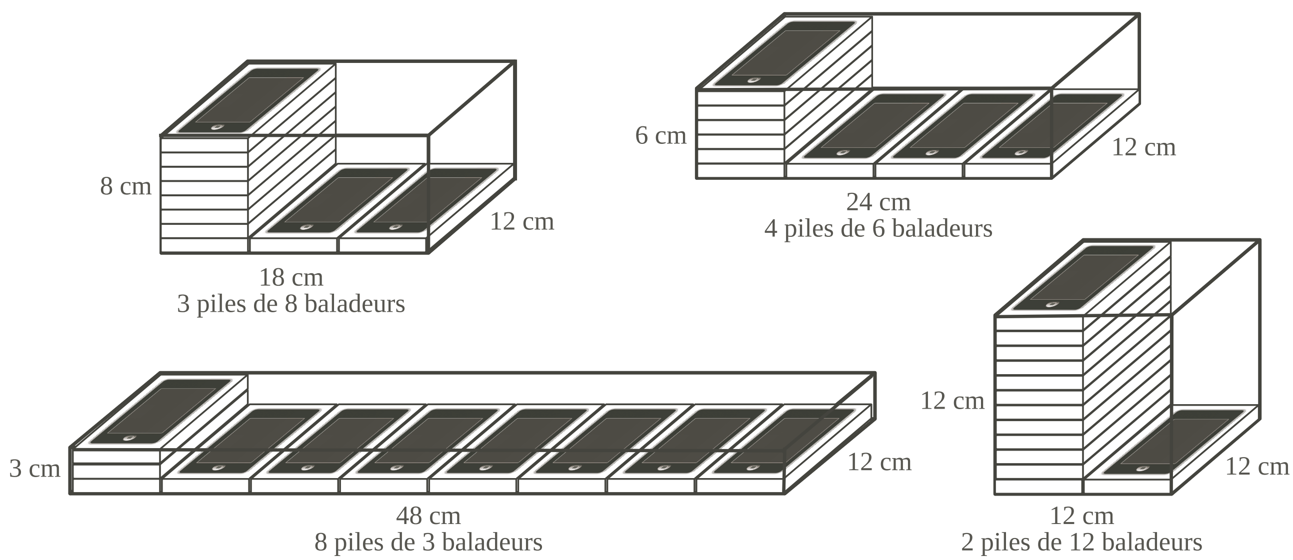
Problème 6

a) La base d'un baladeur mesure 12 cm sur 6 cm. Elle a une aire de 72 centimètres carrés, car $12 \times 6 = 72$. Puisque le baladeur a une hauteur de 1 cm, il a un volume de 72 centimètres cubes, car $1 \times 72 = 72$.

b) L'idée principale, c'est de choisir des dimensions latérales de la boîte qui sont des multtiples de la hauteur de 12 cm et de la largeur de 6 cm des baladeurs, ce qui permettra de placer des baladeurs côte à côte dans la boîte, sans laisser d'espace. Sachant combien on peut placer de piles, on choisit ensuite combien il faut de baladeurs par pile pour en placer 24 dans la boîte. Voici quelques exemples qui sont illustrés ci-dessous :

1. Dans une boîte dont la base mesure 18 cm sur 12 cm, on peut placer 3 piles. La boîte doit donc avoir une hauteur de 8 cm pour permettre 3 piles de 8 baladeurs.
2. Dans une boîte dont la base mesure 24 cm sur 12 cm, on peut placer 4 piles. La boîte doit donc avoir une hauteur de 6 cm pour permettre 4 piles de 6 baladeurs.
3. Dans une boîte dont la base mesure 48 cm sur 12 cm, on peut placer 8 piles. La boîte doit donc avoir une hauteur de 3 cm pour permettre 8 piles de 3 baladeurs.
4. Dans une boîte dont la base mesure 12 cm sur 12 cm, on peut placer 2 piles. La boîte doit donc avoir une hauteur de 12 cm pour permettre 2 piles de 12 baladeurs.

Il y a d'autres possibilités (p. ex., une boîte ayant une base de 12 cm sur 6 cm et une hauteur de 24 cm qui contiendrait une pile de 24 baladeurs, une boîte ayant une base de 48 cm sur 36 cm et une hauteur de 2 cm, qui contiendrait 12 piles de 2 baladeurs), mais les élèves voudront probablement les rejeter parce qu'elles ne sont pas pratiques.



c) La quantité de carton est égale à l'aire totale de la boîte. Une boîte a 3 paires de faces identiques. Si une boîte a une longueur de L cm, une largeur de l cm et une hauteur de h cm, elle aura une aire totale de $2 \times L \times l + 2 \times L \times h + 2 \times l \times h$ centimètres carrés. Voici l'aire totale des boîtes de la partie b) :

(a) $A = 2 \times 18 \times 12 + 2 \times 12 \times 8 + 2 \times 18 \times 8 = 912$ centimètres carrés ;

(b) $A = 2 \times 24 \times 12 + 2 \times 12 \times 6 + 2 \times 24 \times 6 = 1008$ centimètres carrés ;

(c) $A = 2 \times 48 \times 12 + 2 \times 12 \times 3 + 2 \times 48 \times 3 = 1512$ centimètres carrés ;

(d) $A = 2 \times 12 \times 12 + 2 \times 12 \times 12 + 2 \times 12 \times 12 = 864$ centimètres carrés ;

On voit que la boîte qui est un cube utilise le moins de carton. (Ce résultat est vrai pour n'importe quelle boîte de volume fixe, même si les longueurs ne sont pas des entiers. La preuve découle de mathématiques plus avancées.)

Suggestion : On peut aussi lancer une discussion sur l'existence d'autres dimensions possibles pour les boîtes. (Il y en a.) Puisque les dimensions latérales doivent être des multiples de 6 cm et de 12 cm, de manière qu'il n'y ait aucun espace vide entre les baladeurs et que la boîte doit contenir 24 baladeurs, le nombre de possibilités est toutefois limité.

Prolongement

1. Pour placer les baladeurs à la verticale, il suffit de considérer chaque boîte de la partie b) et de la retourner. On obtient donc les mêmes possibilités. Donc, la boîte de forme cubique est toujours celle qui utilise le moins de carton.