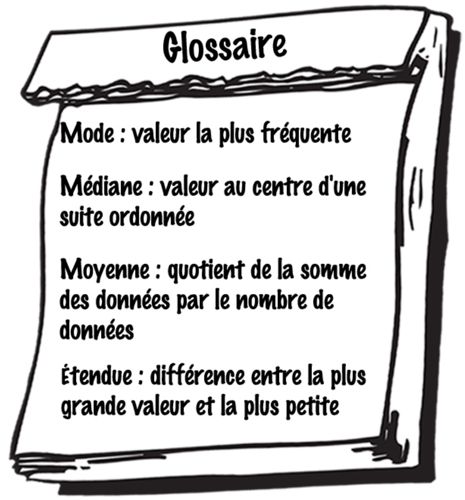
Problème

a) Un garçon nommé Abélard Allard peut gagner un million de dollars comptants s'il résout le problème suivant: Un ensemble de cinq entiers de un chiffre satisfait aux propriétés suivantes:

- leur *mode* est égal à 1;
- leur *moyenne* est égale à 4;
- leur *médiane* est égale à 5.

Quels sont ces cinq entiers?

____ ____ ____ ____ ____



b) Abélard peut gagner 100 000 $ de plus s'il résout un deuxième problème: Déterminer un ensemble de six entiers positifs qui ont une moyenne de 14,5, un mode de 1 et une étendue de 28. Ce problème admet-il plus d'une solution?

Indices

1er indice - a) Si les nombres sont placés en ordre croissant, lequel est égal à 5?

2e indice - a) Combien de 1 doit-il y avoir dans l'ensemble?

3e indice - a) Quelle est la somme des cinq nombres?

4e indice - b) Quelle est la somme des six nombres?

Solution

a) L'ensemble contient cinq nombres. Puisque le mode est égal à 1, ce nombre doit paraître au moins deux fois. Puisque la médiane est égale à 5, le nombre du milieu est 5. On a donc, en ordre croissant, 1, 1, 5, __, __.
Puisque la moyenne est égale à 4, la somme des cinq nombres doit être égale à 5×4, soit 20. (Par définition, la moyenne est égale à $\frac{\text{somme}}{5}$. Donc $4 = \frac{\text{somme}}{5}$. La somme est donc égale à 20, car $20 \div 5 = 4$.) Puisque les trois premiers nombres ont une somme de 7, les deux derniers nombres doivent avoir une somme de 13. Les deux derniers nombres semblent pouvoir être 5 et 8 ou 6 et 7. Or, on ne peut pas avoir un autre 5, puisque le mode est égal à 1. Les deux derniers nombres sont donc 6 et 7. Donc, les cinq nombres sont 1, 1, 5, 6 et 7.

b) Puisque le mode est égal à 1, alors les deux premiers nombres doivent être des 1. (Il pourrait y avoir plus de deux 1.) Puisque les nombres ont une étendue de 28, le dernier nombre doit être 29. On a donc, en ordre croissant, 1, 1, __, __, __, 29. Puisque les nombres ont une moyenne de 14,5, ils doivent avoir une somme de $6 \times 14{,}5$, soit 87. Puisque les trois nombres connus ont une somme de 31, les trois autres nombres doivent avoir une somme de 56 ($87 - 31 = 56$). Donc, Abélard peut donner comme solution n'importe quel ensemble 1, 1, M, N, P, 29, où M, N et P sont trois entiers qui ne dépassent pas 29, mais de sorte que l'entier 1 paraisse le plus souvent. Voici quelques exemples de solutions: $\{1, 1, 1, 10, 25, 29\}$, $\{1, 1, 15, 18, 23, 29\}$, $\{1, 1, 16, 19, 21, 29\}$. Le problème admet donc plus d'une solution.