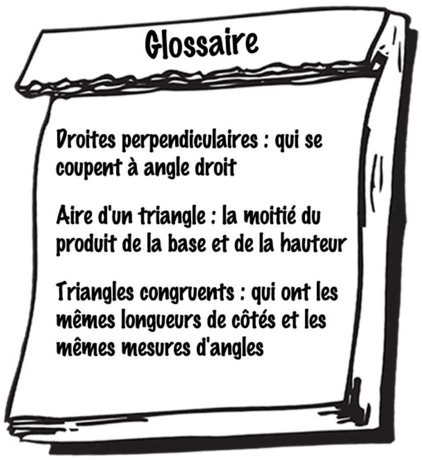
Problème

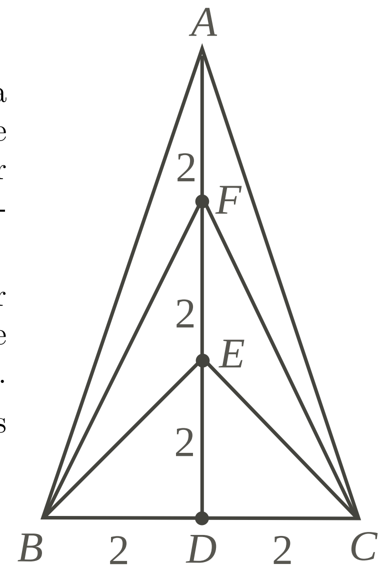
Dans le triangle ABC, AD est perpendiculaire à BC et chacun des segments AF, FE, ED, BD et DC a une longueur de 2 unités.



a) Colorie une section de la figure qui aura une aire égale à $\frac{1}{2}$ de l'aire du triangle ABC. Utilise les petits triangles pour obtenir le plus grand nombre de sections possibles.

b) Répète la partie a) de manière à obtenir des sections de la figure qui auront une aire égale à $\frac{1}{3}$ de l'aire du triangle ABC.

c) Combien y a-t-il de paires de triangles congruents dans la figure?

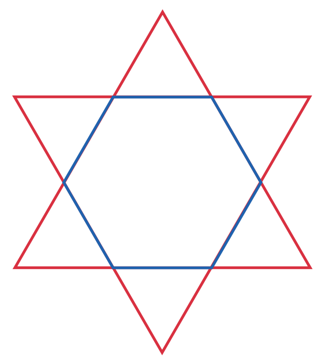


Prolongement

1. Dans la figure ci-contre, chaque petit segment a la même longueur.

   a) Examine les petits triangles à l'extérieur de l'hexagone. De quelle sorte de triangles s'agit-il?

   b) Combien de petits triangles faut-il pour remplir l'intérieur de l'hexagone?



Indices

1er indice - a) Quelle est l'aire du triangle ABC?

2^{e} indice - a) Quelle est la hauteur du triangle BDE? Par rapport à quelle base? Quelle est la hauteur du triangle BEF? Par rapport à quelle base? Quelle est la hauteur du triangle BAF? Par rapport à quelle base?

3^{e} indice - a) Quelle est l'aire du triangle BAF?

4^{e} indice - c) Si deux triangles ont la même aire, sont-ils nécessairement congruents?

Prolongement

1er indice - Si on joint les sommets de l'hexagone au centre de l'hexagone, quelles figures obtient-on?

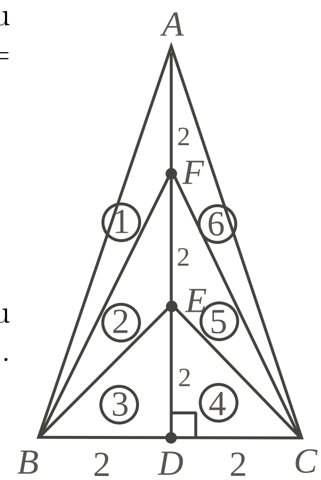
Suggestions

1. Il peut être utile de revoir l'aire des triangles avec les élèves, ainsi que le sens du mot « congruent » avant de présenter ce problème.
2. Le prolongement peut être résolu facilement si les élèves découpent l'étoile, puis replient les triangles extérieurs vers l'intérieur de l'hexagone.
3. On peut faire travailler les élèves en groupes.

Solution

Tout repose sur le fait que les six petits triangles ont la même aire. En effet, les triangles ont tous une base (AF, FE ou ED) de longueur 2 et une hauteur (BD ou DC) de longueur 2.

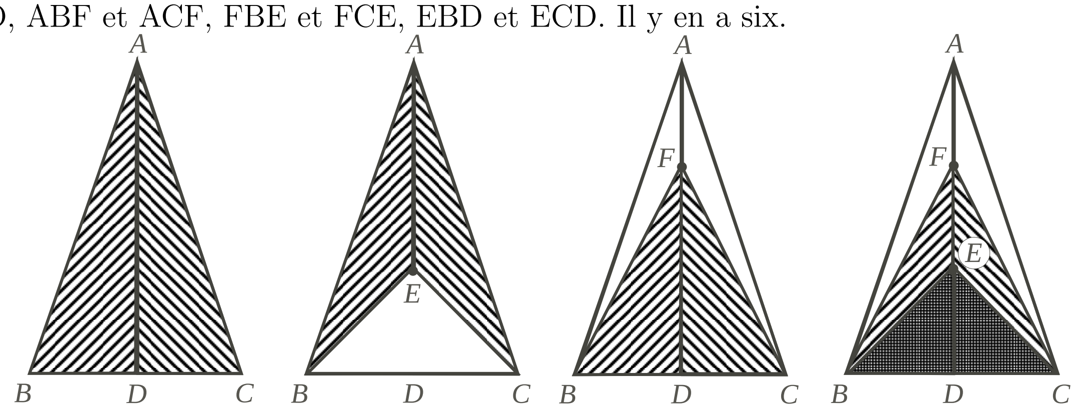
Les triangles ont donc tous une aire égale à $\frac{1}{6}$ de l'aire du triangle ABC.



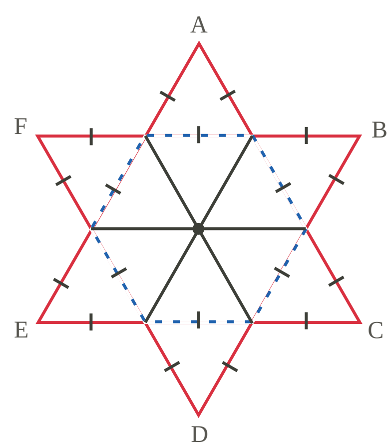
a) Pour colorier une section de la figure qui a une aire égale à $\frac{1}{2}$ de l'aire du triangle ABC, il suffit de colorier 3 petits triangles, puisque $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Il y a 20 façons de le faire, soit en coloriant les triangles :
(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 4, 6), (1, 5, 6);
(2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 4, 6), (2, 5, 6);
(3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6); (4, 5, 6)

b) Pour colorier une section de la figure qui a une aire égale à $\frac{1}{3}$ de l'aire du triangle ABC, il suffit de colorier 2 petits triangles, puisque $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Il y a 15 façons de le faire, soit en coloriant les triangles:
(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6); (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6);
(3, 4), (3, 5), (3, 6); (4, 5), (4, 6); (5, 6)

c) La figure est symétrique par rapport à l'axe AD. On trouve les paires de triangles congruents en utilisant cette symétrie. Les triangles congruents sont: ABD et ACD, ABE et ACE, FBD et FCD, ABF et ACF, FBE et FCE, EBD et ECD. Il y en a six.



Prolongement



1. a) Puisque tous les petits segments ont la même longueur, les triangles à l'extérieur de l'hexagone ont trois côtés de même longueur. Les triangles sont donc équilatéraux et leurs angles mesurent tous 60°.

   b) Si on découpait la figure et qu'on pliait les petits triangles le long des lignes à tirets, les sommets A, B, C, D, E, F se rencontreraient au centre de l'hexagone et les triangles rempliraient l'hexagone. (Voir le Cercle 1 d'Emmy Noether de 2010-2011, problème 6 d) pour un problème associé qui touche aux hexagones.)