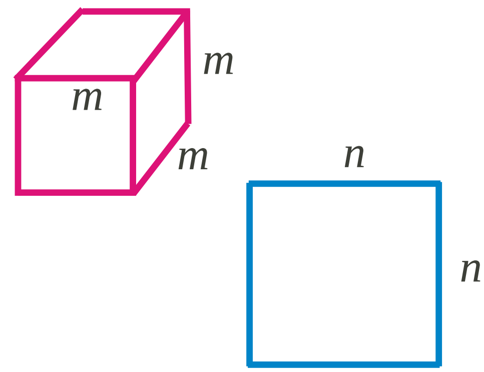
## Problème

On considère le volume $V$ de cubes ayant des arêtes de longueur $m$, cette longueur étant toujours un nombre entier. On considère aussi l'aire $A$ de certains carrés ayant des côtés de longueur $m$, cette longueur étant toujours un nombre entier. Il arrive parfois qu'une valeur particulière de $m$ et une valeur particulière de $n$ donnent la même valeur numérique pour $V$ et pour $A$. Par exemple, si $m = 4$ et $n = 8$, on obtient $V = 4 \times 4 \times 4$, ou $V = \mathbf{64}$ et $A = 8 \times 8$, ou $A = \mathbf{64}$) et $V$ et $A$ ont la même *valeur numérique*.




a) Pour quelles autres valeurs de $m$ inférieures à 10 peut-on trouver une valeur de $n$ de manière que $A$ et $V$ aient la même valeur numérique?

b) Qu'y a-t-il de spécial au sujet de ces nombres $m$?

***Prolongement***
Essaie d'expliquer pourquoi ces nombres spéciaux sont les seules valeurs de $m$ qui fonctionnent.

## Indices

**1er indice -** Comment appelle-t-on un nombre qui est le résultat d'un produit $n \times n$? Qu'est-ce que ça nous dit au sujet des nombres qui représentent des volumes?

*Suggestion*

1. On peut suggérer aux élèves d'organiser leur travail dans un tableau comme celui ci-contre.

| *m* | Volume | Peut être l'aire d'un carré? |
|---|---|---|
| 1 | $1 \times 1 \times 1 = 1$ | Oui : $1 \times 1 = 1$ |
| 2 | | |
| 3 | | |

## Solution

a) On obtient le volume d'un cube en calculant $V = m \times m \times m$ et on obtient l'aire d'un carré en calculant $A = n \times n$. On cherche donc des valeurs de $m$ pour lesquelles $m \times m \times m = n \times n$ pour des valeurs particulières de $n$. En d'autres mots, il faut que $m \times m \times m$ soit le carré d'un nombre quelconque. D'après le tableau ci-dessous, les seules valeurs acceptables de $m$, de 1 à 10, sont 1, 4 et 9.

b) Il semble que la valeur de $m$ doit être un carré parfait. (Si on prolonge le tableau, on constate que la valeur acceptable suivante de $m$ est 16.)

| $m$ | Volume | Peut être l'aire d'un carré? | $m$ | Volume | Peut être l'aire d'un carré? |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $1 \times 1 \times 1 = \mathbf{1}$ | Oui: $\mathbf{1} \times \mathbf{1} = \mathbf{8}$ | 11 | $11 \times 11 \times 11 = 1331$ | Non |
| 2 | $2 \times 2 \times 2 = 8$ | Non | 12 | $12 \times 12 \times 12 = 1728$ | Non |
| 3 | $3 \times 3 \times 3 = 27$ | Non | 13 | $13 \times 13 \times 13 = 2197$ | Non |
| **4** | $4 \times 4 \times 4 = \mathbf{64}$ | Oui: $\mathbf{8} \times \mathbf{8} = \mathbf{64}$ | 14 | $14 \times 14 \times 14 = 2744$ | Non |
| 5 | $5 \times 5 \times 5 = 125$ | Non | 15 | $15 \times 15 \times 15 = 3375$ | Non |
| 6 | $6 \times 6 \times 6 = 216$ | Non | **16** | $\mathbf{16} \times \mathbf{16} \times \mathbf{16} = \mathbf{4096}$ | Oui: $\mathbf{64} \times \mathbf{64} = \mathbf{4096}$ |
| 7 | $7 \times 7 \times 7 = 343$ | Non | 17 | $17 \times 17 \times 17 = 4913$ | Non |
| 8 | $8 \times 8 \times 8 = 512$ | Non | 18 | $18 \times 18 \times 18 = 5832$ | Non |
| **9** | $\mathbf{9} \times \mathbf{9} \times \mathbf{9} = \mathbf{729}$ | Oui: $\mathbf{27} \times \mathbf{27} = \mathbf{729}$ | 19 | $19 \times 19 \times 19 = 6859$ | Non |
| 10 | $10 \times 10 \times 10 = 1000$ | Non | 20 | $20 \times 20 \times 20 = 8000$ | Non |

*Prolongement*

1. Un carré parfait, comme 4, peut être factorisé avec deux facteurs identiques, comme $2\times2$. Lorsqu'on calcule ensuite $4\times4\times4$, on a vraiment $(2\times2)\times(2\times2)\times(2\times2)$. Le facteur 2 paraît six fois, ce qui permet de regrouper les six facteurs en deux groupes de trois, c'est-à-dire $(2\times2\times2)\times(2\times2\times2)$. Seuls les carrés parfaits permettent d'obtenir six facteurs identiques dans la multiplication $m \times m \times m$.