Problema de la Semana

Problema D y Solución

¿Qué Hay en el Cuadrado?

Problema

Catorce cuadrados se colocan en una fila formando la cuadrícula de abajo. Cada cuadrado debe llenarse con un número entero positivo, de acuerdo con las siguientes reglas.

1. El producto de cuatro números enteros en cuadrados adyacentes es 120.
2. Los enteros pueden aparecer más de una vez en la cuadrícula.

Cuatro de los cuadrados ya están llenos con un número entero positivo, como se muestra. Determine todos los valores posibles de x.

		2			4			x			3		

Solución

En ambas soluciones, a_1 es el entero positivo en el primer cuadrado, a_2 es el entero positivo en el segundo cuadrado, a_3 es el entero positivo en el tercer cuadrado, a_4 es el entero positivo en el cuarto cuadrado, etcétera.

Solución 1

Considera los cuadrados del tercero al sexto. Como el producto de cuatro enteros adyacentes es 120, tenemos $2 \times a_4 \times a_5 \times 4 = 120$. Por lo tanto, $a_4 \times a_5 = \frac{120}{2\times 4} = 15$. Como a_4 y a_5 son números enteros positivos, hay cuatro posibilidades: $a_4 = 1$ y $a_5 = 15$, o $a_4 = 15$ y $a_5 = 1$, o $a_4 = 3$ y $a_5 = 5$, o $a_4 = 5$ y $a_5 = 3$.

En cada uno de los cuatro casos tendremos $a_7 = 2$. Podemos ver por qué considerando los cuadrados del cuarto al séptimo. Tenemos $a_4 \times a_5 \times 4 \times a_7 = 120$, o $15 \times 4 \times a_7 = 120$, ya que $a_4 \times a_5 = 15$. Por lo tanto, $a_7 = \frac{120}{15\times 4} = 2$.

- Caso 1: $a_4 = 1$ y $a_5 = 15$
  Considera los cuadrados del quinto al octavo. Tenemos $a_5 \times 4 \times a_7 \times a_8 = 120$, o $15 \times 4 \times 2 \times a_8 = 120$, o $a_8 = \frac{120}{15\times 4\times 2} = 1$.
  A continuación, considera los cuadrados del sexto al noveno. Tenemos $4 \times a_7 \times a_8 \times x = 120$, o $4 \times 2 \times 1 \times x = 120$, o $x = \frac{120}{4\times 2} = 15$.
  Verifiquemos que $x = 15$ satisface la única otra condición en el problema que aún no hemos usado, es decir, $a_{12} = 3$.
  Considere cuadrados de 9 a 12. Si $x = 15$ y $a_{12} = 3$, entonces $a_{10} \times a_{11} = \frac{120}{15\times 3} = \frac{8}{3}$. Pero a_{10} y a_{11} deben ser números enteros, por lo que no es posible para $a_{10} \times a_{11} = \frac{8}{3}$. Por lo tanto, no debe ser posible para $a_4 = 1$ y $a_5 = 15$, por lo que encontramos que no hay solución para x en este caso.

- Caso 2: $a_4 = 15$ y $a_5 = 1$
  Considera los cuadrados del quinto al octavo. Tenemos $a_5 \times 4 \times a_7 \times a_8 = 120$, o $1 \times 4 \times 2 \times a_8 = 120$, o $a_8 = \frac{120}{4\times 2} = 15$.
  A continuación, considera los cuadrados del sexto al noveno. Tenemos $4 \times a_7 \times a_8 \times x = 120$, o $x = \frac{120}{4\times 2\times 15} = 1$.
  Verifiquemos que $x = 1$ satisface la única otra condición en el problema que aún no hemos usado, es decir, $a_{12} = 3$.
  Considera los cuadrados del séptimo al décimo. Como $a_7 = 2$, $a_8 = 15$ y $x = 1$, entonces $a_{10} = \frac{120}{2\times 15\times 1} = 4$. De manera similar, $a_{11} = \frac{120}{15\times 1\times 4} = 2$. Entonces tenemos $x \times a_{10} \times a_{11} \times a_{12} = 1 \times 4 \times 2 \times 3 = 24 \neq 120$. Por lo tanto, no es posible para $a_4 = 15$ y $a_5 = 1$. No hay solución para x en este caso.

- Caso 3: $a_4 = 3$ y $a_5 = 5$
  Considera los cuadrados del quinto al octavo. Tenemos $a_5 \times 4 \times a_7 \times a_8 = 120$, o $5 \times 4 \times 2 \times a_8 = 120$, o $a_8 = \frac{120}{5\times 4\times 2} = 3$.
  A continuación, considera los cuadradoss del sexto al noveno. Tenemos $4 \times a_7 \times a_8 \times x = 120$, o $x = \frac{120}{4\times 2\times 3} = 5$.
  Verifiquemos que $x = 5$ satisface la única otra condición en el problema que aún no hemos usado, es decir, $a_{12} = 3$.
  Considera los cuadrados del séptimo al décimo. Como $a_7 = 2$, $a_8 = 3$ y $x = 5$, entonces $a_{10} = \frac{120}{2\times 3\times 5} = 4$. De manera similar, $a_{11} = \frac{120}{3\times 5\times 4} = 2$. Entonces tenemos $x \times a_{10} \times a_{11} \times a_{12} = 5 \times 4 \times 2 \times a_{12} = 120$, entonces $a_{12} = \frac{120}{5\times\times} = 3$. Por tanto, la condición de que $a_{12} = 3$ se cumple en el caso de que $a_4 = 3$ y $a_5 = 5$. Si continuamos llenando las entradas en los cuadrados, obtenemos las entradas que se muestran en el siguiente diagrama.

5	4	2	3	5	4	2	3	5	4	2	3	5	4

  Vemos que $x = 5$ es una posible solución. Sin embargo, ¿es la única solución? Tenemos un último caso para comprobar.

- Caso 4: $a_4 = 5$ y $a_5 = 3$
  Considera los cuadrados del quinto al octavo. Tenemos $a_5 \times 4 \times a_7 \times a_8 = 120$, o $3 \times 4 \times 2 \times a_8 = 120$, o $a_8 = \frac{120}{3\times 4\times 2} = 5$.
  A continuación, considera los cuadrados del sexto al noveno. Tenemos $4 \times a_7 \times a_8 \times x = 120$, o $x = \frac{120}{4\times 2\times 5} = 3$.
  Verifiquemos que $x = 3$ satisface la única otra condición en el problema que aún no hemos usado, es decir, $a_{12} = 3$.
  Considere cuadrados de 9 a 12. Si $x = 3$ y $a_{12} = 3$, entonces $a_{10} \times a_{11} = \frac{120}{3\times 3} = \frac{40}{3}$. Pero a_{10} y a_{11} deben ser números enteros, por lo que no es posible que $a_{10} \times a_{11} = \frac{40}{3}$. Por lo tanto, no debe ser posible para $a_4 = 5$ y $a_5 = 3$, por lo que encontramos que no hay solución para x en este caso.

Por lo tanto, el único valor posible para x es $x = 5$.

Solución 2

Es posible que haya notado un patrón para los a_i en la Solución 1. Exploraremos este patrón.

Como el producto de cuatro enteros adyacentes es 120, $a_1a_2a_3a_4 = a_2a_3a_4a_5 = 120$. Dado que ambos lados son divisibles por $a_2a_3a_4$, y cada uno es un número entero positivo, entonces $a_1 = a_5$.
Del mismo modo, $a_2a_3a_4a_5 = a_3a_4a_5a_6 = 120$, por lo que $a_2 = a_6$.
En general, $a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} = a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}a_{n+4}$, y entonces $a_n = a_{n+4}$.
Podemos usar esto junto con la información dada para completar las entradas en los cuadrados de la siguiente manera:

x	4	2	3	x	4	2	3	x	4	2	3	x	4

Por lo tanto, $4 \times 2 \times 3 \times x = 120$ y entonces $x = \frac{120}{4\times2\times3} = 5$.